W tym rozdziale zajmiemy się grafami. Są to wykresy zawierające rozmaite informacje, przedstawiające połączenia pomiędzy różnymi swoimi elementami. Algorytmy na nich oparte mają mnóstwo zastosowań: reprezentują hierarchię (np. w zawodach sportowych), opisują rozwój populacji jakichś stworzonek w laboratorium, umożliwiają analizę sieci dróg (np. znajdowanie optymalnej drogi z jednego punktu do drugiego jak w urządzeniach GPS lub grach komputerowych), czy też sieci społecznych (np. analizowanie przepływu informacji w firmie lub jakiejś innej grupie ludzi).

I. Wstępne definicje

Graf, jaki jest, każdy widzi.
Przykład Mapa drogowa.
Przykład Schemat blokowy (np. przepisu kulinarnego).
Przykład Sieć kontaktów.
Przykład Drzewo genealogiczne.
Ale potrzebujemy jakiejś bardziej konkretnej definicji.

Definicja 1 (Graf)**.** Grafem *lub* grafem ogólnym *nazywamy parę* $G = (V, E)$*, gdzie:*
1) V *(czasem zapisywany* $V(G)$*) jest zbiorem* wierzchołków *(*węzłów, punktów*)*
2) E *(czasem zapisywany* $E(G)$*) jest rodziną krawędzi (które mogą się powtarzać), czyli jedno- i dwu-elementowych podzbiorów* V*.*

Będziemy się zajmować głównie grafami skończonymi tj. o skończonej liczbie wierzchołków i krawędzi, dlatego, jeśli nie jest napisane inaczej, zakładamy, że graf w danej definicji lub twierdzeniu jest skończony.
Krawędź łączącą wierzchołki u i v w skrócie zapisujemy jako uv. Jeśli taka krawędź istnieje, mówimy, że u i v są *sąsiadami*, a krawędź uv nazywamy *incydentną* z u i v. Krawędź uv nazywamy *pętlą* jeśli $u = v$.

Definicja 2 (Graf prosty)**.** Grafem prostym *nazywamy parę* $G = (V, E)$*, gdzie:*
1) V *jest zbiorem* wierzchołków *(*węzłów, punktów*)*
2) E *jest zbiorem różnych krawędzi o różnych końcach.*

W grafie, w odróżnieniu od grafu prostego, mogą istnieć krawędzie wielokrotne i pętle.
Graf H składający się tylko z wierzchołków i łączących je krawędzi należących do grafu G nazywamy *podgrafem* G.
Warto jeszcze określić, kiedy grafy (z matematycznego punktu widzenia) są takie same:

Definicja 3 (Grafy izomorficzne)**.** *Dwa grafy* G *i* H *nazywamy* izomorficznymi *jeśli istnieje bijekcja (czyli odwzorowanie „jeden do jednego”)* ψ *między zbiorami* $V(G)$ *i* $V(H)$ *zachowująca sąsiedztwo wierzchołków, tzn.* $uv \in E(G) \Rightarrow \psi(u)\psi(v) \in E(H)$*. Fakt istnienia izomorfizmu grafów zapisujemy* $G \simeq H$*.*

Izomorficzność grafów oznacza, że różnią się one tylko nazwami wierzchołków i krawędzi, a ich struktura jest taka sama. W praktyce nie będziemy rozróżniać grafów izomorficznych (chyba, że do praktycznych zastosowań).
Żeby móc analizować trasy jednokierunkowe (np. niektóre drogi w miastach) będziemy rozważać tzw. grafy skierowane:

Definicja 4 (Graf skierowany)**.** Grafem skierowanym *lub* digrafem *nazywamy parę* $G = (V, E)$*, gdzie:*
1) V *jest zbiorem* wierzchołków *(*węzłów, punktów*)*
2) E *jest rodziną krawędzi skierowanych (które mogą się powtarzać), czyli elementów* $V \times V$*.*

Krawędzie skierowane na rysunkach grafów przedstawiamy jako strzałki, a krawędzie takiego grafu zapisujemy jako pary uporządkowane np. (u, v).

Definicja 5 (Graf z wagami)**.** Grafem z wagami *nazywamy graf (skierowany lub nie), w którym każdej krawędzi e przypisana jest nieujemna liczba $W(e)$. Wagą grafu nazywamy sumę wag jego krawędzi.*

Przykłady Drogi z czasami przejazdu, kroki procedury z kosztem wykonania, łącza z przepustowościami.

Definicja 6 (Stopień wierzchołka)**.** Stopniem wierzchołka *v nazywamy liczbę* $\deg v$*, oznaczającą liczbę krawędzi incydentnych z v (uwaga: w obliczaniu stopnia wierzchołka pętle liczymy jako dwie krawędzie incydentne).*

Twierdzenie 1. *Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem ogólnym, to:*

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|.$$

Zatem liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta.

Przykład Uściski dłoni we wszechświecie.

II. Drogi, cykle i spójność

Definicja 7. Droga *w grafie G to skończony ciąg krawędzi postaci: $wv_1, v_1v_2, \dots, v_ku$. Oznaczamy go $wv_1 \dots v_ku$. Wierzchołek w nazywamy początkiem, a u - końcem drogi.*
W wypadku grafu skierowanego, droga jest zdefiniowana tak samo, ale kolejne krawędzie drogi muszą mieć kierunek zgodny z kierunkiem krawędzi w grafie.

Przykład

Definicja 8. Długość drogi *to liczba jej krawędzi.*

Definicja 9. Droga zamknięta *to droga dla której $w = u$, czyli wierzchołek początkowy jest też wierzchołkiem końcowym.*

Definicja 10. Droga prosta*, to droga, której wszystkie krawędzie są różne.*

Definicja 11. Cykl *to droga prosta zamknięta, w której jedynym powtarzającym się wierzchołkiem jest jej początek (i jednocześnie koniec).*

Definicja 12. Graf acykliczny *to graf, który nie zawiera cykli.*

Definicja 13. Graf spójny *to graf, w którym między dowolnymi dwoma wierzchołkami istnieje droga. Jeśli graf nie jest spójny, to nazywamy go* niespójnym.

Przykład Liczba krawędzi w grafie spójnym: graf spójny musi mieć przynajmniej $|V|-1$ krawędzi.
Każdy graf można podzielić na maksymalne (w sensie zawierania) spójne podgrafy, zwane *składowymi spójnymi.*

Definicja 14. Most *to taka krawędź grafu, po której usunięciu liczba składowych spójnych zwiększa się o 1.*

Definicja 15. Wierzchołkiem rozspajającym *(punktem artykulacji, przegubem) w grafie G nazywamy wierzchołek, którego usunięcie, wraz z jego krawędziami incydentnymi, spowoduje wzrost liczby składowych spójnych (niekoniecznie o 1).*

Definicja 16. Las *to graf prosty, acykliczny.*

Definicja 17. Drzewo *to graf prosty, spójny, acykliczny (czyli spójny las). Wierzchołki drzewa nazywamy* węzłami. *Podgraf spójny drzewa nazywamy poddrzewem.*

III. Przykłady różnych grafów

Definicja 18. Graf pusty *(*antyklika, graf niezależny*) to graf bez krawędzi. Antyklikę o n wierzchołkach oznacza się przez A_n.*

Definicja 19. Graf pełny *(*klika*) to graf prosty, w którym każde dwa wierzchołki są połączone dokładnie jedną krawędzią. Klikę o n wierzchołkach oznacza się przez* K_n.

Przykład Liczba krawędzi w klice.
Przykład Graf-droga i graf-cykl.
Przykład Grafy platońskie.
Przykład Graf Petersena.

IV. Grafy eulerowskie i hamiltonowskie
Przykład Mosty w Królewcu.
Przykład Robot sprzątający korytarze w budynku.
Przykład Listonosz w mieście.

Definicja 20. Cyklem Eulera *nazywamy zamkniętą drogę przechodzącą przez każdą krawędź grafu dokładnie raz.*

Zwróćmy uwagę, że formalnie cykl Eulera nie musi być cyklem (bo wierzchołki po drodze mogą się powtarzać).

Definicja 21. Drogą Eulera *nazywamy drogę prostą zawierającą wszystkie krawędzie grafu.*

Definicja 22. Grafem eulerowskim *nazywamy graf posiadający cykl Eulera.*

Przykłady Alternatywny problem skoczka szachowego.

Charakterystyka grafów Eulerowskich:

Twierdzenie 2 (Euler)**.** *Spójny graf $G = (V, E)$ jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka jest parzysty. Graf G ma drogę Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy ma dokładnie dwa lub zero wierzchołków stopnia nieparzystego.*
W wypadku grafów niespójnych, jeśli przynajmniej dwie składowe posiadają krawędzie, to droga Eulera nie istnieje.

Wniosek o mostach w Królewcu i alternatywnym problemie skoczka szachowego.
Przykład Potrzeba systematycznego podejścia.

Algorytm 1. *FLEURY(G):*
***Dane**: Graf $G = (V(G), E(G))$, spełniający założenia twierdzenia Eulera.*
***Zmienne**: ES - ciąg krawędzi.*
I. Wybierz dowolny wierzchołek v nieparzystego stopnia, jeśli istnieje. W przeciwnym wypadku wybierz dowolny wierzchołek v. Niech $ES = \emptyset$.
II. Jeśli z wierzchołka v nie wychodzi ani jedna krawędź -> STOP.
III. Jeśli pozostała dokładnie jedna krawędź wychodząca z v, np. vw, wtedy usuń vw z $E(G)$ oraz v z $V(G)$ i przejdź do kroku V.
IV. Jeśli została więcej niż jedna krawędź wychodząca z wierzchołka v, wybierz krawędź vw, która nie jest mostem. Następnie usuń vw z $E(G)$.
V. Dołącz vw na końcu ciągu ES, zastąp v wierzchołkiem w i przejdź do kroku II.
***Rezultat**: ES to droga lub cykl Eulera.*

Przykład
Czas działania algorytmu Fleury'ego: $O(|V(G)|^2 \cdot |E(G)|)$.
Jak to wygląda dla grafów skierowanych?

Twierdzenie 3 (Eulera dla grafów skierowanych)**.** *Niech graf skierowany G będzie spójny (gdy go potraktujemy jako graf nieskierowany). Skierowana droga zamknięta w grafie G, przechodząca przez jego wszystkie krawędzie istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy liczba krawędzi wchodzących i wychodzących z każdego wierzchołka jest równa.*

Algorytm postępowania
Grafy hamiltonowskie.
Przykład Robot sprzątający pokoje w budynku.
Przykład Problem komiwojażera.

Definicja 23. Cykl Hamiltona *to cykl przechodzący przez wszystkie wierzchołki grafu.*

Definicja 24. Graf hamiltonowski *to graf posiadający cykl Hamiltona.*

Nie jest znana żadna metoda, pozwalająca szybko (tzn. w czasie wielomianowym) stwierdzić czy dany graf jest hamiltonowski. Mamy do dyspozycji tylko warunki wystarczające na określenie tego.

Twierdzenie 4 (Ore)**.** *Jeśli w grafie prostym* $\mathbf{G} = (V, E)$ *o co najmniej 3 wierzchołkach każde dwa niesąsiednie wierzchołki* v *i* w *spełniają* $\deg v + \deg w \geq |V|$*, to graf* $\mathbf{G}$ *jest hamiltonowski. W szczególności, jest to prawdą jeśli* $|E| \geq \frac{1}{2}(|V|-1)(|V|-2)+2$*.*

V. Najkrótsze drogi

Typowym zagadnieniem związanym z grafami skierowanymi (zwłaszcza z wagami) jest znalezienie „najkrótszej" (czyli o najmniejszej wadze tj. najmniejszej sumie wag krawędzi) drogi z jednego wierzchołka do drugiego.
Przykłady GPS, gry komputerowe, procesy produkcyjne.
Najpierw rozważmy przypadek prostszy: jak wyznaczyć najkrótszą drogę z wybranego wierzchołka do każdego innego w spójnym grafie skierowanym lub nieskierowanym bez wag? Zazwyczaj rozwiązuje się to zagadnienie przy pomocy tak zwanego **algorytmu przeszukiwania wszerz** (formalnie można dodać: ze wskaźnikami).
Dla wygody, w dowolny sposób ponumerujmy wierzchołki grafu $V(G) = \{1, \dots, n\}$. Poszukujemy najkrótszej drogi z wierzchołka 1 do każdego innego wierzchołka j.

Algorytm 2. *WSZERZ(G):*
Dane*: Graf spójny* $G = (V(G), E(G))$*, ze zbiorem wierzchołków* $V(G) = \{1, \dots, n\}$*.*
Zmienne*:* L*,* S *i* V *- zbiory wierzchołków,* d*,* p *- funkcje,* i*,* j *- liczby pomocnicze.*
I. $L := \{1\}$*,* $V := \{2, \dots n\}$*.* $d(1) = 0$*,* $p(1) = \emptyset$*,* $S := \emptyset$*.*
II. Dopóki $L \neq E(G)$ *wykonuj:*
II.1 Dla $j \in V \setminus L$ *wykonuj: jeśli istnieje* $i \in L$ *takie, że* $ij \in E(G)$*, dołącz* j *do* S *i zdefiniuj* $d(j) = d(i) + 1$ *oraz* $p(j) = i$*.*
II.2 $L := L \cup S$*,* $S := \emptyset$*.*
Rezultat*:* $d(j)$ *to minimalna długość drogi z* 1 *do* j*, a* $p(j)$ *to wskaźnik, który pokazuje poprzedni etap drogi z* 1 *do* j*.*

Minimalną długość drogi otrzymujemy od razu, natomiast nad samą drogą trzeba jeszcze chwilę popracować. W ciągu j, $p(j)$, $p(p(j))$, ... występują wierzchołki drogi minimalnej od 1 do j w odwrotnej kolejności - dlatego wystarczy ten ciąg wypisać od tyłu i już droga (jako ciąg wierzchołków) jest znaleziona.
Uwaga Jeśli chcemy znaleźć długość drogi tylko do jednego punktu j, wystarczy dołożyć warunek stopu po znalezieniu liczby $D(j)$.
Czas działania algorytmu WSZERZ to $O(|V| + |E|)$, gdzie $G = (V, E)$.
Rozważmy teraz trudniejszy przypadek: graf prosty skierowany z wagami G (obecność pętli i krawędzi wielokrotnych nie utrudnia zagadnienia, ale to założenie pomaga skupić się na istocie algorytmu). W jest funkcją wag krawędzi. Jak w algorytmie WSZERZ, numerujemy dowolnie wierzchołki. Rozwiązaniem tego problemu jest algorytm Dijkstry (ze wskaźnikami).

Algorytm 3. *DIJKSTRA(G):*
Dane*: Graf* $G = (V(G), E(G))$ *prosty skierowany ze zbiorem wierzchołków* $V(G) = \{1, \dots, n\}$ *i funkcją* W *wag („długości") krawędzi o wartościach nieujemnych (jeśli krawędź* (v, w) *nie istnieje to podstawiamy* $W(v, w) = \infty$*).*
Zmienne*:* L *i* V *- zbiory wierzchołków ,* d*,* p *- funkcje.*
I. $L := \{1\}$*,* $V := \{2, \dots n\}$*.*
II. Dla $i \in V$ *wykonuj:*
II.1. $d(i) := W(1, i)$*.*
II.2. Jeśli $W(1, i) = \infty$ *to* $p(i) := 0$*, w innym wypadku* $p(i) := 1$*.*

III. Dopóki $V \setminus L \neq \emptyset$, wykonuj:
III.1. wybierz $k \in V \setminus L$ takie, że $d(k)$ przyjmuje najmniejszą możliwą wartość.
III.2. dołącz k do zbioru L.
III.3. dla każdego $j \in V \setminus L$ wykonuj: jeśli $d(j) > d(k) + d(k, j)$ to zastąp $d(j)$ sumą $d(k) + d(k, j)$ i zastąp $p(j)$ liczbą k.
***Rezultat**: $d(j)$ to minimalna waga drogi z 1 do j, $p(j)$ to wskaźnik, który pokazuje poprzedni etap drogi z 1 do j.*

Czas działania algorytmu Dijkstry dla grafu $G = (V, E)$ to $O(|V|^2)$. Jako wynik, otrzymujemy minimalną wagę drogi z wierzchołka 1 do każdego innego. Przebieg drogi o najmniejszej wadze odczytujemy ze wskaźników, jak w wypadku przeszukiwania wszerz: Jeśli dla jakiegoś j $p(j) = 0$, to oznacza, że droga z 1 do j nie istnieje. W innym wypadku, w ciągu j, $p(j)$, $p(p(j))$, ... występują wierzchołki drogi minimalnej od 1 do j w odwrotnej kolejności.
Uwaga: Obydwa algorytmy Dijkstry można stosować również do grafów nieskierowanych z wagami. Wystarczy taki graf zmienić w skierowany zastępując każdą jego krawędź dwiema krawędziami łączącymi te same wierzchołki, a skierowanymi w przeciwne strony (wagi pozostają te same).

VI. Sieci i przepływy

Definicja 25. Sieć *jest to graf skierowany z nieujemnymi wagami (funkcja wag jest w tym wypadku zwana* przepustowością sieci*) oraz dwoma wyróżnionymi wierzchołkami, które są odpowiednio nazywane* źródłem *i* ujściem *sieci.*

Przykłady Sieć wodociągowa, sieć komputerowa, sieć kolejowa.
Dla sieci podstawowe jest pytanie: przy danej przepustowości łączy, ile można przesłać (wody, danych, towarów) od źródła do ujścia.

Definicja 26. Przepływ *sieci (V,E) z przepustowością c to funkcja $f : E \to [0, \infty)$ spełniająca warunki:*
1) $0 \leq f(v, w) \leq c(v, w)$ dla każdej krawędzi (v, w) (tj. przepływ wzdłuż krawędzi nie przekracza jej przepustowości).
2) $\sum_{x \in V, (x,v) \in E} f(x, v) = \sum_{x \in V, (v,x) \in E} f(v, x)$ dla każdego wierzchołka v poza źródłem s i ujściem t. Równość ta oznacza, że sumaryczna wartość tego, co wpływa do wierzchołka jest równa sumarycznej wartości tego, co zeń wypływa.
3) $\sum_{x \in V}(f(s, x) - f(x, s)) = \sum_{x \in V}(f(x, t) - f(t, x))$ tzn. sumaryczna wartość tego, co wypływa ze źródła musi być równa sumarycznej wartości tego, co wpływa do ujścia. Wartość ta będzie określana wartością przepływu f.

Właśnie maksymalna możliwa wartość przepływu będzie poszukiwaną przez nas wielkością. Przyda się do tego jeszcze para definicji:

Definicja 27. Siecią residualną *dla sieci $G = (V, E)$ z przepustowością c i przepływem f, nazywamy sieć $G_f = (V, E_f)$, gdzie E_f jest zdefiniowane następująco:*

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V : c_f(u, v) > 0\},$$

gdzie $c_f(u, v)$ oznacza tzw. przepustowość residualną *dla krawędzi (u, v). Ta natomiast jest dana wzorem:*

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v),$$

gdzie: jeśli $(u, v) \notin E$ to $c(u, v) = 0$, oraz $f(v, u) = -a$, gdy $f(u, v) = a$. Krawędzie należące do E_f, nazywa się krawędziami residualnymi.

Bardziej intuicyjnie, przepustowość residualna dla pewnej krawędzi (u, v), oznacza, o ile można zwiększyć przepływ przez nią, tak jednak, aby nie przekroczył on jej przepustowości. Do sieci residualnej natomiast należą te krawędzie, przez które przepływ można zwiększyć.
Przykład

Definicja 28. Ścieżką powiększającą *dla sieci G nazywamy dowolną drogę z s do t w sieci residualnej dla G.* Przepustowość residualną *dowolnej ścieżki powiększającej p, dla sieci G, określamy wzorem:*

$$c_f(p) = \min \{c_f(u,v) : (u,v) \in p\}.$$

Innymi słowy, przepustowość residualna jest to wartość, o jaką maksymalnie można zwiększyć przepływ przez wszystkie krawędzie należące do ścieżki p.
Algorytmy wyznaczania maksymalnego przepływu opierają się na tzw. metodzie Forda-Fulkersona, czyli na stopniowym zwiększaniu przepływu wzdłuż każdej drogi prostej od źródła do ujścia. Sednem każdej takiej operacji jest warunek: jeśli istnieje ścieżka powiększająca, zwiększ maksymalnie przepływ wzdłuż tej ścieżki.
Jako przykład, pokażemy jeden (nie najszybszy, ale najprostszy) ze sposobów wyznaczania maksymalnego przepływu: algorytm Edmondsa-Karpa. Jego ideą jest znajdowanie w każdym kroku najkrótszej (pod względem liczby krawędzi) ścieżki powiększającej.
Przykład

Algorytm 4. *EDMONDS-KARP(G):*
***Dane**: Sieć (V,E) z wyróżnionym źródłem $s \in V$ i ujściem $t \in V$, z przepustowością c.*
***Zmienne**: funkcja przepływu $f : V \times V \to \mathbb{R}$, $r : V \times V \to \mathbb{R}$, p - droga prosta w sieci, r - funkcja przepustowości residualnej, a-liczba.*
I. Dla każdej pary (u,v), $f(u,v) := 0$, $r(u,v) := c(u,v)$, gdy $(u,v) \in E$ oraz $r(u,v) = 0$ w przeciwnym wypadku. {w każdym momencie będzie $r(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$, gdy $(u,v) \in E$}
II. Dopóki istnieje jakakolwiek ścieżka powiększająca wykonaj:
II.1 Wskaż najkrótszą ze względu na liczbę krawędzi ścieżkę powiększającą (np. z algorytmu przeszukiwania wszerz albo z algorytmu Dijkstry dla równych wag). Oznaczmy tę najkrótszą ścieżkę powiększającą przez p.
II.2 $a := \min\{r(u,v) : (u,v)$ należy do $p\}$.
II.3 Dla każdej krawędzi (u,v) należącej do p wykonaj: $f(u,v) := f(u,v) + a$, $f(v,u) := f(v,u) - a$, $r(u,v) := r(u,v) - a$, $r(v,u) := r(v,u) + a$.
***Rezultat**: Funkcja zadana przez f na zbiorze E jest funkcją przepływu o maksymalnej wartości dla sieci (V,E).*

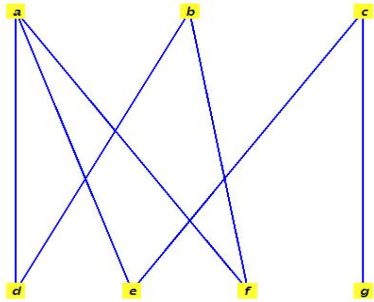
Uwaga W trakcie wykonywania tego algorytmu, mogą się pojawić możliwości tworzenia „przepływów ujemnych" tj. wybierania ścieżek powiększających w sieciach residualnych zawierających krawędzie, których w oryginalnej sieci nie było. To nic nie przeszkadza - wynik działania algorytmu i tak będzie dobry.
Czas działania algorytmu Edmondsa-Karpa (z uwzględnieniem algorytmu przeszukiwania wszerz) wynosi $O(|V||E|^2)$, aczkolwiek to jest bardzo pesymistyczne oszacowanie (osiągane jedynie dla bardzo szczególnych sieci).
Uwaga Algorytm ten można przerobić tak, by rozwiązywał też sytuację z wieloma źródłami i ujściami. Wystarczy do sieci dołożyć jedno „superźródło" i jedno „superujście" oraz krawędzie o nieskończonej przepustowości łączące je odpowiednio z wszystkimi źródłami i wszystkimi ujściami, a po przejściu algorytmu Edwardsa-Karpa usunąć te „dodatki".

VII. Grafy dwudzielne i skojarzenia

W kolejnych rozdziałach będziemy się zajmować tylko grafami spójnymi, nieskierowanymi i bez wag (choć poszczególne pojęcia można uogólnić na wszystkie grafy, jednak te uogólnienia nie niosą ze sobą nic szczególnie ciekawego).

Definicja 29. Graf dwudzielny *to graf $G = (V,E)$, w którym zbiór wierzchołków V da się podzielić na dwa rozłączne podzbiory V_1 oraz V_2 tak, by żadne dwa wierzchołki w obrębie tego samego podzbioru V_i nie były sąsiadami (czyli podział na dwie antykliki). Dla podkreślenia takiego podziału, graf dwudzielny będziemy oznaczać przez $(V_1 \cup V_2, E)$.*

Przykład



RYSUNEK 1. Ten graf jest dwudzielny: $V_1 = \{a, b, c\}$, $V_2 = \{d, e, f, g\}$. W obrębie tych dwóch zbiorów nie ma w ogóle połączeń.

Twierdzenie 5. *Graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego cykl ma parzystą długość.*

Można to sprawdzić na powyżej przedstawionym grafie - zresztą jest to logiczne: skoro cykl musi się kończyć w tej samej grupie, w której zaczynał, a w każdym kroku przeskakuje pomiędzy tymi grupami to musi to uczynić parzystą liczbę razy.

Wniosek 6. *Każde drzewo jest grafem dwudzielnym (bo nie zawiera cykli).*

Grafy dwudzielne pozwalają modelować zjawiska, w których mamy do czynienia z obiektami dwóch typów. Najczęściej chodzi o to, by badać możliwe połączenia pomiędzy dwoma typami obiektów.
Przykład Zbiór klientów biura matrymonialnego/portalu randkowego deklarujących heteroseksualność. Wierzchołkami grafu będą wtedy kobiety (V_1) i mężczyźni (V_2). Krawędź między dwoma wierzchołkami istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy osoby te spełniają nawzajem swoje oczekiwania (jeśli chodzi o wybór „pary”). Oczywiście, nie ma krawędzi pomiędzy wierzchołkami tego samego typu.
Przykład W klinice transplantologicznej jako graf dwudzielny można zinterpretować zbiór dostępnych do transplantacji organów i zbiór pacjentów, którzy oczekują na przeszczep. Połączenia między wierzchołkami z tych grup występują, gdy dany organ kwalifikuje się do przeszczepienia dla danego pacjenta z odpowiednio małym ryzykiem odrzucenia.
Przykład Na uczelni, jedną grupą wierzchołków mogą być pracownicy dydaktyczni, a drugą - zajęcia, które trzeba poprowadzić. Połączenia między wierzchołkami z tych grup występują, gdy dane zajęcia mogą być prowadzone przez danego pracownika.
Trzeci przykład rozwiniemy później. Dwa pierwsze sugerują nam typowe zagadnienie związane z grafem dwudzielnym: znalezienie tzw. pełnego skojarzenia, czyli „znalezienia pary” dla każdego wierzchołka z grupy pierwszej w grupie drugiej.

Definicja 30. Skojarzenie *w grafie dwudzielnym* $G = (V_1 \cup V_2, E)$ *to podzbiór krawędzi* $M \subset E(G)$, *w którym żadne dwie* $v_1v_2, u_1u_2 \in M$ *nie wychodzą z tego samego wierzchołka (czyli zbiór rozłącznych par elementów połączonych krawędziami).*

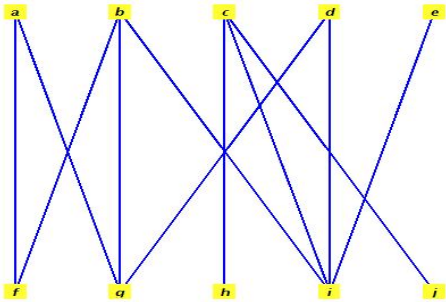
Mówimy, że $v \in V_i$ jest *skojarzony*, jeśli istnieje $w \in V_{3-i}$ taki, że krawędź vw należy do skojarzenia.

Definicja 31. Pełne skojarzenie *w grafie dwudzielnym* $\mathbf{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ *to skojarzenie, w którym każdy wierzchołek z* V_1 *jest skojarzony.*

Dla grafu z rysunku 1 pełne skojarzenie istnieje (np. ad, bf, ce - ale jest więcej niż jedno). Kiedy takie skojarzenie da się skonstruować? By odpowiedzieć na to pytanie, trzeba wpierw skonstruować funkcję Φ, która każdemu zbiorowi $A \subset V_1$ przyporządkowuje zbiór tych wierzchołków V_2, które są sąsiednie z przynajmniej jednym wierzchołkiem w A.

Twierdzenie 7 (Hall)**.** *Niech* $\mathbf{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ *będzie grafem dwudzielnym. Wówczas pełne skojarzenie w* G *istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy* $|A| \leq |\Phi(A)|$ *dla każdego podzbioru* A *zbioru* V_1.

Twierdzenie Halla potwierdza istnienie pełnego skojarzenia dla grafu z rysunku 1. Natomiast nie istnieje pełne skojarzenie dla grafu z rysunku 2:



RYSUNEK 2. Zgodnie z twierdzeniem Halla, ten graf nie ma pełnego skojarzenia dla $V_1 = \{a, b, c, d, e\}$, $V_2 = \{f, g, h, i, j\}$, gdyż jeśli rozważymy $A = \{a, b, d, e\}$, to $\Phi(A) = \{f, g, i\}$, a zatem $|A| = 4 > 3 = |\Phi(A)|$.

Grafy dwudzielne badał Lloyd Shapley, który w 2012 roku otrzymał nagrodę Nobla z ekonomii między innymi za modelowanie i rozwiązanie zagadnienia optymalizacyjnego zwanego problemem stabilnego małżeństwa. Jest to zadanie, w którym każdy kawaler i panna na wydaniu posiadają swój ranking płci przeciwnej i trzeba ich tak połączyć w pary małżeńskie, żeby nie doszło do „pokusy zdrady”, czyli sytuacji, gdy pewna para (niemałżeńska) woli siebie nawzajem od swoich partnerów w małżeństwie. Okazuje się, że bez względu na ranking indywidualnych preferencji, zawsze istnieje szczęśliwe rozwiązanie tego problemu. Wspólnie z Davidem Gale'em, Shapley stworzył wydajny algorytm rozwiązujący to zagadnienie.
Wiemy, że w ogólnym przypadku trudno stwierdzić, kiedy graf jest hamiltonowski. Dla grafów dwudzielnych sprawdzenie tego jest dużo prostsze.

Twierdzenie 8 (o cyklu Hamiltona w grafach dwudzielnych)**.** *Niech* $\mathbf{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ *będzie grafem dwudzielnym. Jeśli G ma cykl Hamiltona, to* $|V_1| = |V_2|$.
Dla pełnych grafów dwudzielnych zachodzi też implikacja w przeciwną stronę, tj. jeśli $|V_1| = |V_2|$, *to G ma cykl Hamiltona.*

VIII. Kolorowanie wierzchołków

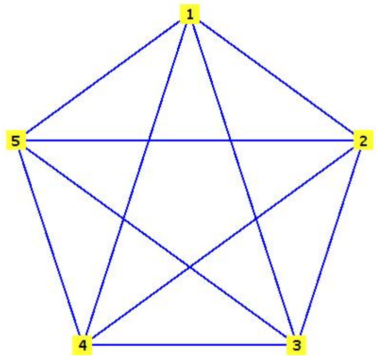
Definicja 32. Kolorowaniem wierzchołkowym *nazywamy każde przyporządkowanie wierzchołkom kolorów (lub innych etykiet), w którym żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie są „pokolorowane” tak samo.*
Formalnie, dla grafu prostego $G = (V, E)$ i zbioru skończonego K (kolorów) kolorowaniem wierzchołkowym *(lub po prostu* kolorowaniem grafu*) nazywamy dowolną funkcję* $c : V \to K$ *taką, że* $c(v) \neq c(w)$ *o ile* $vw \in E$.

Inaczej, kolorowanie wierzchołków grafu to jego podział na rozłączne antykliki (każdy zbiór wierzchołków pokolorowanych tym samym kolorem nie ma połączeń między sobą, więc jest antykliką).
Najciekawszym problemem związanym z kolorowaniem grafu jest znalezienie *kolorowania optymalnego*, czyli takiego, które używa jak najmniejszej liczby kolorów.
Przykład Załóżmy, że chcemy umieścić w różnych pojemnikach pewne substancje chemiczne tak, by substancje w jednym pojemniku nie reagowały ze sobą. W tym celu, oznaczamy te substancje jako wierzchołki grafu. Krawędzie pojawiają się pomiędzy wierzchołkami, symbolizującymi substancje reagujące ze sobą. Jeśli znajdziemy optymalne kolorowanie wierzchołkowe, to będziemy mogli umieścić substancje „tego samego koloru” w jednym pojemniku (bo nie reagują ze sobą). Ta minimalna liczba kolorów będzie liczbą pojemników, których potrzebujemy.
Przykład Zapraszamy gości na przyjęcie (np. wesele). Niektórzy goście niespecjalnie się lubią, więc nie chcemy ich sadzać przy jednym stoliku. Wszystkich gości opisujemy

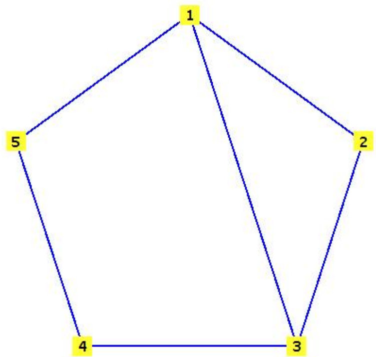
jako wierzchołki grafu, krawędzie symbolizują konflikty między nimi. Jeśli znajdziemy optymalne kolorowanie wierzchołkowe takiego grafu, to będziemy mogli umieścić gości „tego samego koloru" przy jednym stole (bo nie mają nic przeciwko sobie). Ta minimalna liczba kolorów będzie liczbą stolików, których potrzebujemy.

Definicja 33. Liczbą chromatyczną *grafu G nazywamy najmniejszą liczbę barw, którą można pokolorować wierzchołki tego grafu. Liczbę tę zapisujemy $\chi(G)$.*
Formalnie, jest to najmniejsza możliwa moc zbioru K z definicji kolorowania wierzchołkowego, taka, że dla tego zbioru funkcja c istnieje.

Przykłady



Rysunek 3. Dla tego grafu liczba chromatyczna wynosi 5 (każdy wierzchołek musi być pomalowany innym kolorem).



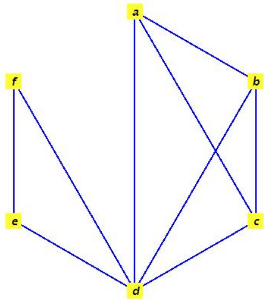
Rysunek 4. Dla tego grafu liczba chromatyczna wynosi 3 (np. wierzchołki $1, 4$ - czerwone, $2, 5$ - niebieskie, 3 - zielone).

Problem dokładnego określenia liczby chromatycznej grafu jest trudny. Jednak istnieją dość proste oszacowania z góry tej liczby.

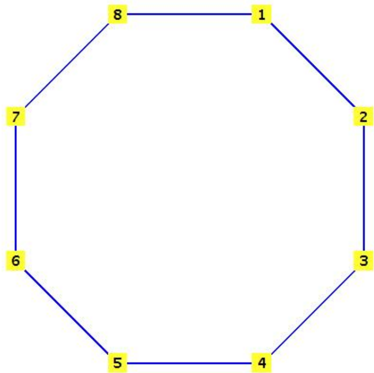
Definicja 34. Maksymalny stopień grafu G *(oznaczony $\Delta(G)$) to największa z liczb* $\deg v$*, gdzie $v \in V(G)$ (czyli największy możliwy stopień wierzchołka w grafie G).*

Twierdzenie 9 (Brooks)**.** *Jeśli G jest kliką lub cyklem o nieparzystej liczbie wierzchołków, to $\chi(G) = \Delta G + 1$. Jeśli G jest dowolnym innym grafem to $\chi(G) \leq \Delta G$.*

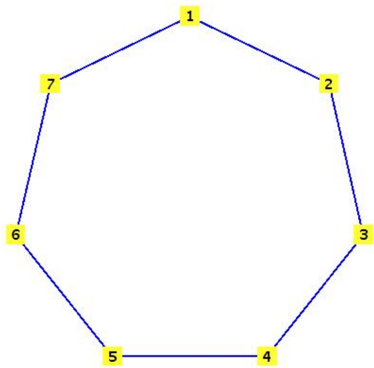
Przykład Dla grafu z rysunku 3, stopień każdego wierzchołka wynosi 4, więc $\Delta G = 4$. Jako, że to jest klika, zgodnie z twierdzeniem Brooksa indeks chromatyczny wynosi 5.
Przykład
Przykład Graf z rysunku 5 ma $\chi(G) = 4 \leq 5 = \Delta G$ (warto zauważyć, że liczba chromatyczna nigdy nie jest mniejsza niż liczba wierzchołków największej kliki w grafie, w szczególności a, b, c i d muszą być różnych kolorów. e i f mogą być dowolnych kolorów różnych od siebie i od d.).



Rysunek 5. Dla powyższego grafu mamy $\deg a = \deg b = \deg c = 3$, $\deg d = 5$ i $\deg e = \deg f = 2$. Stąd $\Delta(G) = 5$.



Rysunek 6. Ten graf jest cyklem, ale o parzystej liczbie wierzchołków. W szczególności, można go pokolorować dwoma kolorami - wierzchołki parzyste jednym, wierzchołki nieparzyste drugim. $\Delta G = 2$ dla tego grafu (po każdy wierzchołek jest stopnia 2), więc jest to zgodne z twierdzeniem Brooksa.

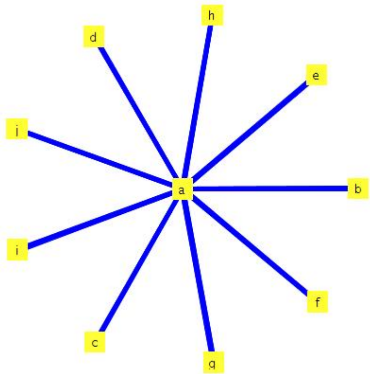


Rysunek 7. W przypadku cyklu o nieparzystej liczbie wierzchołków, zgodnie z twierdzeniem Brooksa, liczba chromatyczna musi wynosić 3. W szczególności, jeśli spróbujemy go pokolorować dwoma kolorami - wierzchołki parzyste jednym, wierzchołki nieparzyste drugim, tak jak poprzednio, to okaże się, że wierzchołek 7 sąsiaduje z wierzchołkiem 1. $\Delta G = 2$ dla tego grafu (po każdy wierzchołek jest stopnia 2), więc jest to zgodne z twierdzeniem Brooksa.

Przykład

Przykład Każdy graf dwudzielny ma liczbę chromatyczną równą 2 - wystarczy wierzchołki V_1 pokolorować jednym kolorem, a wierzchołki $V_2 =$ innym. Gwiazda z poprzedniego przykładu jest szczególnym przypadkiem grafu dwudzielnego ($V_1 = \{a\}$).

Przykład Zagadnienie 4 barw.



Rysunek 8. Nierówność w twierdzeniu Brooksa może być „bardzo ostra”: w szczególności istnieje graf spójny o dowolnie dużej liczbie wierzchołków, a liczbie chromatycznej równej 2 - jest nim tzw. gwiazda z powyższego rysunku, ale nie tylko...

IX. Kolorowanie krawędzi

Definicja 35. Kolorowanie krawędziowe *grafu G to każde przyporządkowanie krawędziom grafu kolorów, w którym dwie krawędzie o wspólnym wierzchołku mają różne kolory. Formalnie, jest to funkcja $c : E(G) \to K$ (K - skończony zbiór kolorów lub innych etykiet), taka, że dla dowolnych $u, v, w \in V(G)$, jeżeli $vu, vw \in E(G)$ to $c(vu) \neq c(vw)$.*

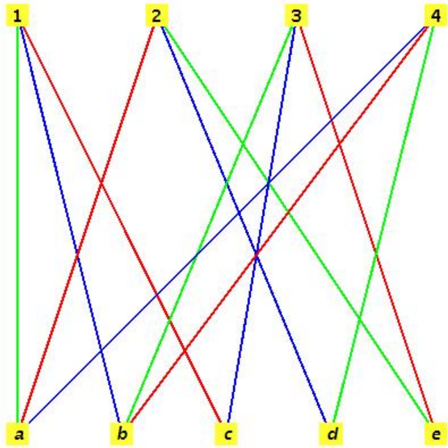
Przykład Układanie harmonogramów zajęć na uczelni: Dany niech będzie graf dwudzielny. Pierwszy typ wierzchołków to pracownicy dydaktyczni, a drugi - grupy dziekańskie. Wierzchołki są połączone wtedy i tylko wtedy, gdy dany pracownik ma poprowadzić zajęcia z daną grupą. Kolory krawędzi odpowiadają różnym godzinom, w którym można mieć zajęcia. Oczywiście, żadna grupa i żaden nauczyciel nie może mieć więcej niż jedne zajęcia na raz, więc musimy krawędzie pokolorować zgodnie z warunkami kolorowania krawędziowego.
Znów będzie nas interesować najmniejsza możliwa liczba kolorów koniecznych do użycia w kolorowaniu krawędziowym. Np. w powyższym problemie liczba ta będzie symbolizować minimalną liczbę godzin, w których da się poukładać wszystkie zajęcia.

Definicja 36. Indeks chromatyczny *grafu G (oznaczany przez $\chi'(G)$) to minimalna liczba kolorów, które trzeba wykorzystać, by wykonać kolorowanie krawędziowe tego grafu. Formalnie, jest to najmniejsza możliwa moc zbioru K z definicji kolorowania krawędziowego, taka, że dla tego zbioru funkcja c istnieje.*

Indeks chromatyczny można oszacować znacznie precyzyjniej niż liczbę chromatyczną dzięki poniższemu twierdzeniu:

Twierdzenie 10 (Vizing)**.** *Dla dowolnego grafu G zachodzi: $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Równość w lewej nierówności zachodzi dla o wiele większej liczby grafów niż równość w prawej.
Przykład Dla grafów dwudzielnych zachodzi $\Delta(G) = \chi'(G)$. Można to wykorzystać do rozwiązania problemu harmonogramu, jak na poniższym rysunku:
Przykład Cykle: Przykładem grafu, dla którego zachodzi równość w prawej nierówności w tw. Vizinga (tj. $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$) jest cykl o nieparzystej liczbie krawędzi, czyli też nieparzystej liczbie wierzchołków (np. graf z rysunku 7). Dla nich $\chi'(G) = 3$, a $\Delta(G) = 2$. Z kolei cykle o parzystej liczbie wierzchołków (jak graf z rysunku 6) spełniają lewą równość w nierówności w tw. Vizinga: $\chi'(G) = 2 = \Delta(G)$ (jak na rysunku 6).
Przykład Kliki: Kliki o parzystej liczbie wierzchołków spełniają równość $\Delta(G) = \chi'(G)$, a kliki o nieparzystej liczbie wierzchołków: $\Delta(G) + 1 = \chi'(G)$. Np. klika z rysunku 3 ma indeks chromatyczny równy 5.



Rysunek 9. Grupy dziekańskie w tym przypadku oznaczyłem cyframi, a nauczycieli literami. Jak widać, $\Delta(G) = \chi'(G) = 3$, więc krawędzie dało się pokolorować trzema kolorami, zatem (o ile nie ograniczają nas inne czynniki zewnętrzne) można ułożyć harmonogram tak, żeby wszystkie odbyły się w ciągu 3 terminów - np. najpierw odbywają się (jednocześnie) zajęcia „czerwone”, potem „zielone”, a potem „niebieskie”.

KONIEC MATERIAŁU WYKŁADU

Powodzenia na egzaminie!
GK