W tym rozdziale zajmiemy się zagadnieniem: jak policzyć elementy dużych (ale skończonych) zbiorów bez użycia brutalnej siły i wypisania wszystkich elementów.
Przykład. Liczba wszystkich sposobów ułożenia kart w 52-kartowej talii to około 10^{68}. Takiej listy ułożeń nie są w stanie przechowywać nawet największe komputery.
Przykład. Prawdopodobieństwo dyskretne.

I. Powtórka podstaw

Przez $|S|$ oznaczamy liczbę elementów zbioru S (moc S).

Twierdzenie 1 (Prawo sumy). *Niech S i T będą zbiorami skończonymi. Wtedy*

$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|.$$

W szczególności, jeśli S i T są rozłączne, to $|S \cup T| = |S| + |T|$.

Przykład Ile liczb naturalnych dodatnich, mniejszych lub równych 1000, dzieli się przez 3 lub przez 5?

Twierdzenie 2 (Prawo iloczynu). *Niech $S_1, \ldots, S_k$ będą zbiorami skończonymi. Wtedy*

$$|S_1 \times \ldots \times S_k| = \prod_{j=1}^{k} |S_j|.$$

Innymi słowy, jeśli mamy zbiór ciągów długości k, takich, że pierwszy wyraz można wybrać na n_1 sposobów, dla ustalonego pierwszego wyrazu, drugi można wybrać na n_2 sposobów i ogólnie, dla ustalonych j pierwszych wyrazów wyraz $j+1$-szy można wybrać na n_{j+1} sposobów, to nasz zbiór ma $n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ elementów.

Przykład. Na ile sposobów można wylosować 5 kart z talii 52-kartowej ze zwracaniem i bez zwracania?
Przykład. Liczba dróg z jednego do drugiego końca pewnego grafu.
Przykład. Liczba funkcji pomiędzy zbiorami skończonymi. Notacja zbioru funkcji z jednego zbioru do drugiego. Prawo potęgi. Moc zbioru podzbiorów.
Niech będzie dany zbiór niepusty S o n elementach i liczba całkowita $0 \leq r \leq n$.

Definicja 1. *Ciąg r różnych elementów ze zbioru S nazywamy r-*elementową wariacją *ze zbioru S* bez powtórzeń. *Moc zbioru takich wariacji oznaczamy przez $P(n, r)$.*

Twierdzenie 3.

$$P(n, r) = \prod_{j=0}^{r-1} (n-j) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

W szczególności, istnieje $P(n, n) = n!$ n-wyrazowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru S, które nazywamy permutacjami *zbioru S.*

Wariacje istotne są przy zliczaniu zbiorów, w których porządek ustawienia elementów jest istotny (ciągów). Jeśli porządek nie jest istotny, bardziej przydatne są kombinacje.

Definicja 2. r-elementową kombinacją elementów *zbioru S nazywamy jego r-elementowy podzbiór. Liczbę takich podzbiorów oznaczamy $\binom{n}{r}$ (czytamy „n po r” lub „n nad r”) i nazywamy* współczynnikiem dwumianowym Newtona.

Twierdzenie 4.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Przykład. Ile istnieje ciągów długości n, złożonych z zer i jedynek, takich, że zawiera on dokładnie r jedynek.
Przykład. Ile istnieje możliwych układów kart w pokerze? Ile z nich to pokery, karety, fulle, kolory, strity itp.?

II. Zliczanie wielokrotności
Kolejny przykład wymaga połączenia wiedzy i umiejętności z zakresu kombinatoryki i teorii liczb.
Przykład. Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, które są podzielne jednocześnie przez 9 i przez 12?
Najpierw musimy skorzystać z twierdzenia znanego z teorii liczb:

Twierdzenie 5. *Dla dodatnich liczb a, b zachodzi:*

$$a|c \text{ i } b|c \Leftrightarrow NWW(a,b)|c.$$

W ten sposób sprowadzimy poprzednie pytanie do:
Przykład. Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, które są podzielne przez $NWW(9,12) = 36$?
By sformułować twierdzenie dające odpowiedź na tego typu pytania, potrzebujemy wpierw definicji:

Definicja 3. *Niech $x \in \mathbb{R}$.* Cechą *(lub* podłogą*) z x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x. Oznaczamy ją przez $[x]$.*

Twierdzenie 6. *Dla dodatniej liczby a istnieje dokładnie*

$$[\frac{a}{c}]$$

liczb dodatnich, podzielnych przez dodatnią liczbę c i nie większych od a.
W szczególności, dla dodatnich liczb a, b, takich, że $a < b$ istnieje dokładnie

$$[\frac{b}{c}] - [\frac{a-1}{c}]$$

liczb podzielnych przez dodatnią liczbę c i zawartych w przedziale domkniętym $[a, b]$.

III. Metoda włączeń i wyłączeń
Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będą zbiorami skończonymi.

Twierdzenie 7 (Zasada włączeń i wyłączeń)**.** *Aby znaleźć liczbę elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, należy znaleźć liczby wszystkich możliwych przecięć tych zbiorów, dodać do siebie wyniki uzyskane dla przecięć nieparzystej liczby zbiorów, a następnie odjąć wyniki uzyskane dla przecięć parzystej liczby zbiorów. Ściślej:*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{k \neq i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

Przykład. Ile jest liczb całkowitych czterocyfrowych, w których co najmniej raz występuje cyfra 0, co najmniej raz cyfra 1 i co najmniej raz cyfra 2?
Przykład. Ile jest liczb całkowitych dodatnich mniejszych lub równych 2000, podzielnych przez 9,11,13 lub 15?

IV. Metoda dwumianowa
Metoda przydaje się do obliczania wartości sum w których występują współczynniki dwumianowe Newtona, dość często pojawiające się w zagadnieniach zliczania.

Twierdzenie 8 (Wzór dwumianowy)**.** *Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:*

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}.$$

Przykład. Udowodnić wzór na liczbę podzbiorów zbioru n-elementowego.

V. Wzór pudełkowy

Kolejną metodę zliczania przedstawiam w postaci nieformalnej, bo łatwiej ją w takiej zapamiętać.

Twierdzenie 9 (Wzór pudełkowy). *Istnieje $\binom{n+k-1}{k-1}$ sposobów rozmieszczania n identycznych przedmiotów w k rozróżnialnych pudełkach.*

Twierdzenie 10 (Wzór pudełkowy - inne sformułowanie). *Liczba sposobów wyboru n przedmiotów należących do k rozróżnialnych typów przy założeniu, że powtórzenia są dopuszczalne, wynosi $\binom{n+k-1}{k-1}$.*

Przykład. Układanie w nierozróżnialnych pudełkach jest znacznie trudniejsze.
Przykład. Ile liczb ze zbioru liczb całkowitych dodatnich nie większych niż 100000 ma tę własność, że suma ich cyfr wynosi 7? (wskazówka: jak rozmieścić 7 kul w 5 pudełkach?).
Przykład. Na ile sposobów można wybrać 10 monet, mając do wyboru nieograniczony zapas groszy, pięcio-, dziesięcio- i pięćdziesięcio-groszówek? (dwa rozwiązania)

VI. Podziały

Definicja 4. Podział *zbioru S to rodzina jego parami rozłącznych podzbiorów, których sumą jest sam zbiór S. Rozłączne podzbiory nazywamy* blokami *podziału.*

Twierdzenie 11 (O zliczaniu permutacji). *Załóżmy, że zbiór n przedmiotów został podzielony na k podzbiorów mających odpowiednio $n_1, \ldots, n_k$ elementów ($n = n_1 + \ldots + n_k$). Dwa przedmioty są tego samego typu, jeśli należą do tego samego bloku danego podziału. Dwie permutacje są rozróżnialne, jeśli na co najmniej jednym miejscu stoją w nich elementy różnych typów. Wtedy liczba rozróżnialnych permutacji naszego zbioru wynosi:*

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Przykład. Kapelusz zawiera karteczki z kolejnymi literami słów a) PAWEŁ b) BARNABA. Karteczki są pojedynczo wyjmowane z kapelusza i układane w takiej kolejności, w jakiej zostały wyciągnięte. Ile różnych słów (tj. ciągów liter odpowiedniej długości) można w taki sposób otrzymać? Dwa słowa uznajemy za różne, jeśli choć w jednym miejscu mają one różne litery.
Innym zagadnieniem jest zliczanie nie permutacji rozróżnialnych pewnym podziałem, ale samych podziałów.

Definicja 5. Podział uporządkowany *zbioru S to ciąg $(A_1, \ldots, A_k)$, którego elementy tworzą podział S. Istotna jest kolejność w jakiej występują zbiory A_i, ale nie kolejność elementów wewnątrz tych zbiorów.*

Twierdzenie 12 (O zliczaniu podziałów uporządkowanych). *Jeśli dany zbiór ma n elementów i jeśli $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, to istnieje*

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

podziałów uporządkowanych $(A_1, \ldots, A_k)$ tego zbioru takich, że $|A_i| = n_i$ dla $i = 1, \ldots, k$.

Przykład. Na ile sposobów można spośród 20-osobowej grupy utworzyć 3 rozłączne komisje, jeśli muszą mieć, odpowiednio, 3,5 i 7 członków?
Przykład. Rozdanie brydżowe to podział uporządkowany talii 52 kart na 4 zbiory, po 13 kart w każdym.
a) Ile jest możliwych rozdań brydżowych?
b) Ile jest rozdań brydżowych takich, że każdy z graczy otrzyma jednego asa?

VII. Zasada szufladkowa Dirichleta

Oczywistym jest, że jeśli mamy rozmieścić m przedmiotów w n szufladach i założymy, że $m > n$, to istnieje szuflada w której są co najmniej 2 przedmioty. Pewne uogólnienie tego faktu nazywamy zasadą szufladkową (pudełkową) Dirichleta.

Twierdzenie 13 (Zasada szufladkowa Dirichleta). *Jeśli skończony zbiór S jest podzielony na k podzbiorów $S_1, \ldots, S_k$ to co najmniej jeden z tych podzbiorów ma co najmniej $\frac{|S|}{k}$ elementów.*

Twierdzenie 14 (Zasada szufladkowa Dirichleta - wniosek). *Jeśli skończony zbiór S jest podzielony na k podzbiorów $S_1, \ldots, S_k$ i $|S| > nk + 1$ to co najmniej jeden z tych podzbiorów ma co najmniej $n + 1$ elementów.*

Przykład. Każdy punkt płaszczyzny jest pomalowany na czerwono lub na niebiesko. Udowodnić, że istnieje na tej płaszczyźnie nieskończenie wiele par punktów, które są oddalone od siebie dokładnie o 1 i pomalowane tym samym kolorem.

Przykład. Niech A będzie dowolnym zbiorem 12-elementowym liczb naturalnych dodatnich nie większych niż 50. Udowodnić, że istnieją co najmniej cztery różnych (ale niekoniecznie rozłączne) podzbiory pięcioelementowe zbioru A takie, że suma elementów każdego z tych czterech podzbiorów jest taka sama.