W poprzednim rozdziale zobaczyliśmy, w jaki sposób funkcje określone na zmiennach ciągłych (funkcje rzeczywiste) pomagają nam zrozumieć funkcje zmiennych dyskretnych (ciągi i szeregi). W tym wyjaśnimy, w jaki sposób ciągi, a zwłaszcza szeregi mogą pomóc w zrozumieniu zależności zadanych na przedziałach w $\mathbb{R}$.

Przykład Zauważmy, że klasyczny zapis funkcyjny i zapis szeregowy mogą oznaczać jedno i to samo. Na przykład $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1+x^2+x^4+\ldots$ jest oczywiście szeregiem geometrycznym zbieżnym na przedziale $(-1,1)$ i $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$. Dlatego, jeśli $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ i $D_f = (-1,1)$ to równie dobrze możemy wzór tej funkcji zapisać jako $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$. Taki zapis może być bardzo pożyteczny: łatwo zauważyć, że dla dużych n kolejne wyrazy ciągu x^{2n} są coraz bliższe zeru, więc jeśli wystarczy nam rezultat przybliżony, to możemy przeliczyć tylko kilka pierwszych wyrazów:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{k} x^{2n}.$$

Z kolei ta postać jest bardzo wygodna do prowadzenia wszelkich obliczeń, gdyż jest to po prostu wielomian, a na wielomianach bardzo łatwo wykonuje się wszystkie możliwe operacje, w tym różniczkowanie i całkowanie. Akurat w tym przykładzie funkcja wyjściowa $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ nie jest na tyle skomplikowana, żeby przejście na wielomian znacząco upraszczało nam pracę, ale gdyby przedstawienie w takiej postaci dowolnie skomplikowanej funkcji byłoby możliwe, życie (matematyczne) mogłoby się stać o wiele prostsze. Czy, kiedy i jak się to da zrobić przekonamy się w ramach tego wykładu.

I. Szeregi potęgowe i ich otwarte przedziały zbieżności

Wzory funkcji będziemy się starali zapisać, jako szeregi „z parametrem", którym jest zmienna $x \in D_f$. Jako, że chcemy, by w rezultacie badać wielomiany (a raczej pewne ich uogólnienia zezwalające na nieskończenie wiele składników jednomianowych), przedmiotem naszego zainteresowanie będą przede wszystkim tzw. szeregi potęgowe.

Definicja 1. Szeregiem potęgowym *zmiennej rzeczywistej x o środku w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ i współczynnikach $a_n \in \mathbb{R}$ nazywamy szereg postaci:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Jeśli chcemy definiować funkcję daną wzorem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, będziemy potrzebować dziedziny tej funkcji. Naturalnie, $a \in D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(a-x_0)^n$ jest zbieżny. Zawsze wiemy, że $x_0 \in D_f$, więc dziedzina jest niepusta. Jeśli dziedzina szeregu potęgowego jest większa niż ten jeden punkt, jest pewnym przedziałem (lub całym zbiorem $\mathbb{R}$). Na tym wykładzie nie będziemy się zajmować końcami tego przedziału (jako sytuacje osobliwe, nie mają one znaczenia w modelach ekonomicznych), więc będziemy zakładać, że D_f jest przedziałem otwartym.

Definicja 2. Promieniem zbieżności *szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ nazywamy taką liczbę $R \geq 0$, że szereg jest zbieżny dla x takich, że $|x-x_0| < R$ i rozbieżny dla $|x-x_0| > R$. Jeśli szereg jest zbieżny w całym $\mathbb{R}$, to zapisujemy $R = +\infty$.*

Dla $x = x_0 - R$ lub $x = x_0 + R$ szereg potęgowy może, ale nie musi być zbieżny. Te dwa szeregi liczbowe (po wstawieniu odpowiednich wartości za parametr x) trzebaby badać osobno. Ale, jak już wspomnieliśmy, nie będziemy się tym zajmować. Oczywiście, jeśli $R = 0$, to szereg potęgowy jest zbieżny tylko dla $x = x_0$.

Definicja 3. Otwartym przedziałem zbieżności *szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ nazywamy przedział $(x_0 - R, x_0 + R)$, o ile $0 < R < +\infty$. Jeśli $R = +\infty$ to otwartym przedziałem zbieżności nazywamy $\mathbb{R}$. Otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego utożsamiamy z dziedziną funkcji danej wzorem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.*

Jeśli $R = 0$, to nie ma sensu definiować funkcji o dziedzinie jednopunktowej, choć moglibyśmy uznać, że przedziałem zbieżności szeregu jest sam punkt $\{x_0\}$.
Wiemy już, jak wyznaczać przedział zbieżności w wypadku szeregów potęgowych będących jednocześnie szeregami geometrycznymi (jak w przykładzie). W przypadku ogólnym często możemy wykorzystać jedno z poniższych twierdzeń:

Twierdzenie 1 (d'Alambert). *Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ będzie szeregiem potęgowym. Jeśli istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g$ i jeśli $g \neq 0$, to promień zbieżności tego szeregu $R = \frac{1}{g}$. Ponadto, jeśli $g = 0$ to $R = +\infty$, a jeśli $g = +\infty$ to $R = 0$.*

Twierdzenie 2 (Cauchy). *Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ będzie szeregiem potęgowym. Jeśli istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g$ i jeśli $g \neq 0$, to promień zbieżności tego szeregu $R = \frac{1}{g}$. Ponadto, jeśli $g = 0$ to $R = +\infty$, a jeśli $g = +\infty$ to $R = 0$.*

Trudno jednoznacznie wskazać, kiedy używać którego z tych twierdzeń, ale ogólna wskazówką jest następująca: twierdzenie d'Alamberta wykorzystujemy najczęściej, gdy wyrazy ciągu a_n są w postaci związanej z iloczynem (potęgi, silnie), a twierdzenie Cauchy'ego, gdy wyrazy ciągu a_n są sumami - np. wielomianami (przydatny może być wtedy wniosek 3 z poprzedniego wykładu oraz twierdzenie o trzech funkcjach z wykładu o granicach funkcji).
Przykłady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^5+n^2+1}{2^n+3^n}(2x-1)^n$.

II. Wzór Taylora
Skoro wiemy już, jak wyznaczać dziedzinę szeregu potęgowego, powstaje pytanie - jak, mając dany „typowy" wzór funkcji, przedstawić ją w postaci szeregu potęgowego o niezerowym promieniu zbieżności w otoczeniu jakiegoś punktu x_0. Okazuje się, że wystarcza do tego umiejętność obliczania pochodnych dowolnego rzędu. We wzorach poniżej przez $f^{(n)}$ oznaczam n-tą pochodną funkcji f (czyli, przypominam, pochodną $(n-1)$-szej pochodnej funkcji f).

Definicja 4. *Załóżmy, że funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ posiada pochodne dowolnego rzędu (czyli jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna).* Szeregiem Taylora *dla funkcji f o środku $x_0 \in (a, b)$ nazywamy szereg:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

Jeśli $x_0 = 0$ to tę szczególną postać szeregu Taylora nazywa się szeregiem Maclaurina.

Szereg Taylora jest to ewidentnie szereg potęgowy. Czy ten szereg ma niezerowy promień zbieżności i co on ma wspólnego z funkcją f? Częściowo na to pytanie odpowiada poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 3 (Taylor). *Jeżeli k-ta pochodna funkcji $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ istnieje oraz jest ciągła w całym przedziale (a, b) to dla dowolnego punktu $x_0 \in (a, b)$ istnieje takie otoczenie $U(x_0) \in (a, b)$, że dla dowolnego punktu $x \in U(x_0)$ zachodzi:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_k(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} + R_k(x)$$

gdzie $R_k(x) = f^{(k)}(c)\cdot\frac{(x-x_0)^k}{k!}$, a c jest pewną (z reguły nieznaną) liczbą z przedziału (x_0, x) lub (x, x_0) (zależnie która z tych liczb jest mniejsza). R_k nazywamy resztą Lagrange'a *wzoru Taylora.*

Wzór w powyższym twierdzeniu nazywamy *wzorem* lub *rozwinięciem Taylora* funkcji f w otoczeniu x_0. Pomijając resztę Lagrange'a dla zadanego k otrzymujemy wzór przybliżony na obliczenie wartości funkcji f w otoczeniu x_0 zwany *k-tym przybliżeniem* lub *k-tą aproksymacją Taylora*:

$$f(x) \approx T_k(x) = \sum_{n=0}^{k-1} f^{(n)}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^n}{n!} = f(x_0) + f'(x_0)\frac{x-x_0}{1!} + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots$$

$$\ldots + f^{(k-1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{k-1}}{(k-1)!}$$

Zauważmy, że obliczanie przybliżonej wartości funkcji za pomocą różniczki było po prostu wykorzystaniem drugiej aproksymacji Taylora, więc możemy przypuszczać, że zazwyczaj przybliżenia Taylora wyższego rzędu niż pierwsze będą dokładniejszą metodą przybliżania niż różniczka. Błąd k-tego przybliżenia Taylora można oszacować przez:

$$|R_k(x)| \leq \left| \max_{c\in[x_0,x]} f^{(k)}(c) \cdot \frac{(x-x_0)^k}{k!} \right|$$

(jeśli $x < x_0$ to oczywiście pod maksimum powinien być przedział $[x, x_0]$). Jeśli taki ciąg zmierza do 0 dla każdego x z pewnego przedziału $(x_0 - R, x_0 + R)$, to funkcja f w tym przedziale jest równa swojemu szeregowi Taylora (w sensie - wartość funkcji f w każdym punkcie a przedziału jest równa sumie szeregu liczbowego, który powstaje po podstawieniu w szeregu Taylora a w miejsce x). O funkcji f mówi się wtedy, że jest *analityczna*. Taka sytuacja jest prawdziwa np. jeśli wszystkie pochodne f przyjmują ograniczone wartości w otoczeniu x_0.

Przykład Dla funkcji $f(x) = \ln x$ zapisać wzór Taylora w punkcie $x_0 = 1$ z resztą Lagrange'a rzędu 4. Wykorzystać ten wzór do obliczenia przybliżonej wartości $\ln 1,02$ oraz błędu tego przybliżenia.

Przykład Ten przykład przeliczymy, ale to są tak znane i istotne przedstawienia funkcji w postaci Taylora, że warto je zapamiętać jako twierdzenie.

Twierdzenie 4. *Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

Jak widać, promienie zbieżności tych szeregów Maclaurina wynoszą $+\infty$ i szeregi są zbieżne do odpowiednich funkcji na całym $\mathbb{R}$.

III. Różniczkowanie, całkowanie i jednoznaczność szeregów potęgowych

Podsumujmy: dlaczego warto zapisywać funkcje w postaci szeregów potęgowych?

- Możemy ograniczyć się do pewnej liczby początkowych wyrazów tego szeregu, nadal całkiem dobrze przybliżając badaną funkcję. Suma skończonej liczby wyrazów szeregu potęgowego jest wielomianem, czyli najprostszą w dalszym badaniu funkcją.
- Dzięki temu uproszczeniu, możemy obliczyć wartości funkcji w dowolnym przybliżeniu, nawet jeśli jest bardzo skomplikowana (o ile tylko potrafimy policzyć jej pochodne).
- Wielomiany, w przeciwieństwie do wielu funkcji, są łatwe w badaniu - w szczególności łatwo obliczyć ich pochodne (np. by sprawdzić ich monotoniczność) i całki (a wiemy, że niektórych funkcji w postaci zwartej nie da się przecałkować analitycznie).

Co do ostatniego punktu, powstaje pytanie: czy faktycznie rozwijanie funkcji w szereg potęgowy jest przemienne z całkowaniem i różniczkowaniem tj. czy jeśli najpierw rozwiniemy funkcję w szereg potęgowy, a potem zróżniczkujemy/scałkujemy, dojdziemy do tego samego wyniku, co najpierw ją różniczkując/całkując a następnie efekt tego działania rozwijając w szereg potęgowy? Odpowiedzią są dwa kolejne twierdzenia:

Twierdzenie 5 (O różniczkowaniu szeregu potęgowego)**.** *Szereg potęgowy można różniczkować wyraz po wyrazie wewnątrz przedziału zbieżności. Ujmując to formalnie, jeśli R jest promieniem zbieżności szeregu $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ to szereg potęgowy*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n(x-x_0)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots$$

ma również promień zbieżności R, a jego suma jest pochodną sumy pierwotnego szeregu tj. $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n(x-x_0)^n)' = S'(x)$.

Twierdzenie 6 (O całkowaniu szeregu potęgowego)**.** *Szereg potęgowy można całkować wyraz po wyrazie wewnątrz przedziału zbieżności. Ujmując to formalnie, jeśli R jest promieniem zbieżności szeregu $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ to szereg potęgowy*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n(t-x_0)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_n(x-x_0)^{n+1} =$$
$$= a_0x_0 + a_0(x-x_0) + \frac{1}{2}a_1(x-x_0)^2 + \frac{1}{3}a_2(x-x_0)^3 + \dots$$

ma również promień zbieżności R, a jego suma jest całką sumy pierwotnego szeregu tj. $\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n(t-x_0)^n\,dt = \int_0^x S(t)dt$.

Warto się jeszcze zastanowić nad jednoznacznością zapisu funkcji jako szeregu potęgowego. Czy przypadkiem nie można przedstawić funkcji w postaci szeregu potęgowego na więcej niż jeden sposób? Okazuje się, że nie:

Twierdzenie 7 (O jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy)**.** *Jeśli dwa szeregi potęgowe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ o promieniach zbieżności odpowiednio $R_a > 0$ i $R_b > 0$ mają tę samą sumę dla x spełniających nierówność $|x-x_0| < r$ dla pewnego $r \le \min\{R_a, R_b\}$ to wszystkie ich współczynniki są odpowiednio równe tj. $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ itd.*

Z tego twierdzenia wynika, że każda funkcja w otoczniu danego punktu da się rozwinąć w szereg potęgowy co najwyżej w jeden sposób. Dla funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych musi to być szereg Taylora.

IV. Sumy szeregów potęgowych

Wiemy już, w jaki sposób zapisywać funkcje o danym „zwartym" wzorze w postaci szeregu potęgowego. Naturalnym jest zastanawianie się, czy funkcję zapisaną jako szereg potęgowy da się zapisać w sposób skrócony. Prosto się „zwija" np. szeregi geometryczne.
Przykład $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$.
W ogólnym przypadku, sytuacja jest dużo trudniejsza, a czasem beznadziejna (niekoniecznie funkcję zadaną jako szereg potęgowy w ogóle da się krócej zapisać). Czasami, za pomocą twierdzeń o różniczkowaniu i całkowaniu, da się dany szereg sprowadzić do szeregu geometrycznego (albo jakiegoś innego, którego zwartą formę znamy), a potem już wiemy, co robić.
Przykłady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^n$ w przedziale $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}x^n$ w przedziale $(-2, 2)$.