Wstęp: zmienne ciągłe i zmienne dyskretne

Podczas dotychczasowych wykładów rozważaliśmy przede wszystkim zależności funkcyjne pomiędzy *zmiennymi ciągłymi* tj. przyjmującymi dowolne wartości rzeczywiste. Jednak najczęściej, przynajmniej w kwestiach ekonomicznych, tak naprawdę posługujemy się *zmiennymi dyskretnymi*, czyli przyjmującymi wartości, które zmieniają się nie stopniowo, ale skokowo (czyli ich wartości zmieniają się co najmniej o określoną jednostkę - najlepszym przykładem jest założenie, że dana zmienna należy do liczb całkowitych).
Przykładowo, załóżmy, że rozwiązujemy zagadnienie optymalizacyjne i otrzymujemy wynik, że aby zmaksymalizować zysk stocznia powinna w tym roku wyprodukować $3\frac{17}{31}$ statku. Oczywiście, ten wynik nie ma sensu w rzeczywistości, ze względu na to, że statki nie są dobrem nieskończenie podzielnym. Ale nawet w wypadku tego typu badania wielkości nieskończenie podzielnych, jak czas (przynajmniej z perspektywy przeciętnego człowieka, nie fizyka kwantowego) niektóre wyniki ekonomicznie mogą nie mieć sensu. Załóżmy, że w wyniku innego zagadnienia optymalizacyjnego obliczyliśmy, że idealny czas pracy jakiegoś pracownika przed przerwą na odpoczynek wynosi $\pi + \sqrt{3}$ godziny. Mało prawdopodobne, by udało się wprowadzić przerwę po dokładnie takim czasie. Dlatego często potrzebujemy, by badana funkcja przyjmowała wartości w całkowitych jednostkach: czy to w sztukach, czy np. w sekundach (albo nawet latach).
Jeśli dyskretny jest tylko zbiór sensownych wartości funkcji, albo wynik naszych obliczeń, to nie sprawia nam to wielkich problemów - możemy zazwyczaj założyć, że nasz wynik jest przybliżeniem rzeczywistego (np. w pierwszym z powyższych przykładów wyciągnąć wniosek, że stocznia powinna wyprodukować 3 lub 4 statki, a następnie oszacować, która z tych dwu sytuacji jest lepsza, a w drugim, że pracownik idealnie powinien przecować pomiędzy $4,5$ a 5 godzin przed przerwą). Często mamy jednak do czynienia z przypadkiem, gdy dziedzina funkcji jest zbiorem dyskretnym. Tak naprawdę, takie są właśnie wyniki prawie wszystkich badań - np. gdy badamy funkcję dochodów jakiejś populacji, naszą jednostką, której przyporządkowujemy dochód jest jedna osoba. Jeśli mierzymy zmiany kursu akcji pewnej firmy w czasie, to pomiarów dokonujemy nie „w każdej chwili”, ale w pewnych odstępach czasu (co sekundę, godzinę, dzień, miesiąc, rok).
Taki model dokładniej niż przez funkcję zadaną na przedziale rzeczywistym jest zobrazowany przez ciąg - czyli funkcję zadaną na dyskretnym zbiorze liczb naturalnych. Może on reprezentować np. cenę akcji w kolejnych momentach pomiaru. I właśnie takimi ciągami będziemy się zajmować w tym rozdziale. Przy okazji zwrócę uwagę, że ciągami macierzy posługiwaliśmy się na algebrze badając dynamikę dyskretną za pomocą równań różnicowych. Wtedy, jak i w tym rozdziale, istotną rolę pełniła granica takiego ciągu w nieskończoności.
Skoro zmienne dyskretne są najczęściej bardziej realistyczne, to po co używać ciągłych? Okazuje się, że większość obliczeń są dużo łatwiejsza na zmiennych ciągłych. Dzięki zmiennym ciągłym mogliśmy rozważać nieskończenie małe zmiany zmiennych, co doprowadziło nas do tak użytecznych narzędzi jak granice w punktach, pochodne, czy całki. Na przykład - zbadanie optymalnej wielkości produkcji bez użycia pochodnych wymagałoby obliczenia zysków z produkcji dla każdej możliwej ilości produktu. Jeśli funkcję zysku z produkcji „uciąglimy”, będziemy mogli użyć poznanych dotychczas metod i nawet jeśli uzyskany wynik będzie niemożliwy do realizacji, będziemy mogli się domyślać, że prawdziwie optymalny wynik leży gdzieś w pobliżu i wystarczy sprawdzić 2-3 możliwości najbliższe wynikowi przybliżonemu (jak w przykładzie o stoczniach). Jak już w tym rozdziale zobaczymy, wiele da się powiedzieć o zachowaniu się ciągu na podstawie zachowania funkcji będącej jego „uciągloną” wersją.
Jaka jest cena takiego uproszczenia? Kluczową kwestią jest fakt, że otrzymujemy wyniki przybliżone. Jako, że sam pomiar danych ekonomicznych jest zazwyczaj obarczony sporym błędem, to jeśli nasze uproszczenie spowoduje tylko niewielki błąd - nie zmieni to wniosków z modelu, więc takim błędem możemy się nie przejmować. Często w

rozważaniach ekonomicznych mamy do czynienia z liczbami na tyle dużymi, że zmiana wartości w każdym z pojedynczych punktów ma bliski zeru wpływ na całość modelu, dlatego badając np. zmiany cen akcji w odstępach godzinowych przez 5 lat, rozkład dochodów w 40-milionowej populacji, czy koszt produkcji w fabryce w zależności od liczby wyprodukowanych gwoździ rocznie, możemy zazwyczaj założyć, że wartości tej funkcji zmieniają się w sposób ciągły i mieć pewność, że nie wpłynie to na wynik badań. To, czy dane lub wynik różnią się od rzeczywistości o jedną godzinę, jedną osobę, czy jeden gwóźdź, w praktyce wspomnianych sytuacji nie ma znaczenia. Natomiast naszą czujność powinno budzić stosowanie przybliżenia ciągłego, gdy mówimy o wielkościach małych w stosunku do jednostek pomiaru (np. wspomniana produkcja statków w stoczni w niedługim okresie czasu). Może się zdarzyć, że „uciąglenie" modelu zachowa dobre rezultaty, ale może się zdarzyć, że wynik stanie się zupełnie mylący.
Ogólną zasadą jest, że ciągła aproksymacja (czyli przybliżenie) ciągu jest dobrym narzędziem, gdy jednostki miary są małe w porównaniu z mierzonymi wielkościami. Warto pamiętać o sprawdzeniu tego warunku przed zastosowaniem bardziej wyrafinowanej matematyki do swoich badań.
Jako ciekawostkę dodam, że matematycy zajmują się również wpływem takich upraszczających założeń, a także błędów pomiarowych na możliwą wielkość błędu w wyniku. Takie zagadnienia są przedmiotem badań teorii błędów, która jest z kolei działem tzw. metod numerycznych (wykładanych również na niektórych kierunkach naszej uczelni - zainteresowanych mogę przekierować do dodatkowych materiałów na ten temat). Przykładem zastosowań teorii błędów jest wzór, który pojawił się na wykładzie przy okazji metody trapezów przybliżonego całkowania - tam wzór stosowany do obliczeń mógł nam dawać niedokładny wynik, ale potrafiliśmy oszacować, jaki co najwyżej błąd popełniamy stosując metodę trapezów i w ten sposób zorientować się, czy jej zastosowanie jest dopuszczalne w obecnie rozważanym problemie.

I. Ciągi liczbowe i ich granice

Przypomnijmy szkolną definicję:

Definicja 1. Ciągiem liczbowym *nazywamy funkcję o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych, której dziedziną jest* $\mathbb{N}$.

Definicja 2. Ciągiem liczbowym skończonym *nazywamy funkcję o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych, której dziedziną jest skończony podzbiór* $\mathbb{N}$.

Argumenty takiej funkcji nazywa się *indeksami ciągu*, a wartości - *wyrazami ciągu*. Często stosuje się zapis indeksu dolnego zamiast nawiasu funkcyjnego tj. jeśli a jest ciągiem to zamiast $a(n)$ piszemy a_n.
W szkole definiowane były ciągi: arytmetyczny (o zadanej różnicy) i geometryczny (o zadanym ilorazie) - nie będę powtarzał definicji, ale proszę sobie je przypomnieć.
Ogólnie, o ciągach powiedzieć możemy niewiele. W zasadzie żaden wyraz ciągu nie musi zależeć od pozostałych. Obliczanie granicy takiego ciągu w punkcie nie ma sensu, gdyż albo ciąg nie jest określony w otoczeniu tego punktu, albo przyjmuje tam wartość, która naturalnie jest jego granicą w tym punkcie (jako jedyna wartość w otoczeniu). Jedynym nietrywialnym przypadkiem jest granica w nieskończoności. Można ją definiować tak jak dla innych funkcji lub przez szczególną definicję dla ciągu (obie definicje są równoważne):

Definicja 3. *Granicą ciągu* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest liczba* $g \in \mathbb{R}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n>n_0}\ |a_n - g| < \varepsilon.$$

Granicą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest* $+\infty$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{M\in\mathbb{R}}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n>n_0}\ a_n > M.$$

Granicą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest* $-\infty$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{M\in\mathbb{R}}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n>n_0}\ a_n < M.$$

O ciągu, który posiada granicę będącą liczbą rzeczywistą mówimy, że jest *zbieżny*. W innym wypadku jest *rozbieżny*.
Po co alternatywna definicja dla samego ciągu, skoro ciąg jest funkcją a granicę funkcji już zdefiniowaliśmy? Otóż czasem dzięki niej łatwiej jest udowodnić nieistnienie granicy odpowiedniej funkcji. Zależność pomiędzy granicami ciągów oraz funkcji opisuje poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 1 (Heine)**.** *Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu tego punktu (z możliwym wyjątkiem punktu x_0). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\forall_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} \left\{ (\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_n \in D_f \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \right\}.$$

Jeśli funkcja f będzie określona w pewnym przedziale $(M, +\infty)$, $M \in \mathbb{R}$, to $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\forall_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} \left\{ (\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_n \in D_f \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \right\}.$$

Jeśli funkcja f będzie określona w pewnym przedziale $(-\infty, M)$, $M \in \mathbb{R}$, to $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\forall_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} \left\{ (\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_n \in D_f \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \right\}.$$

Przykład Dzięki temu twierdzeniu, w łatwiejszy sposób możemy udowodnić, że $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ nie istnieje.
W szczególności, twierdzenie Heinego mówi, że nie są nam potrzebne specjalne techniki obliczania granic ciągów - wystarczy, że użyjemy tych, które znamy dla funkcji zmiennych ciągłych.

Wniosek 2. *Załóżmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem, a f jest funkcją o dziedzinie rzeczywistej, taką, że $f(n) = a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{R}$. Jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$ to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.*

Praca na funkcjach, a nie na ciągach umożliwia nam korzystanie z wielu narzędzi niedostępnych w przypadku dyskretnym np. z twierdzenia de L'Hospitala.
Przykład $a_n = \frac{\ln n}{n}$.
Drugi przykład na tyle często będzie się nam przydawać, że sformułuję go w postaci wniosku.

Wniosek 3. *Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej k zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$. W szczególności również $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$.*
Ten wniosek można uogólnić dzięki twierdzeniu o 3 funkcjach: jeśli W jest wielomianem, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{W(n)} = 1$.

Zauważmy, że wniosek 2 jest tylko implikacją, nie równoważnością. Z faktu, że granica pojedynczego ciągu istnieje, nie wynika istnienie granicy funkcji.
Przykład $a_n = \sin(n\pi)$.

II. Szeregi liczbowe i ich zbieżność

Prawdopodobnie symbol ten był używany w szkole, a prawie na pewno podczas zajęć w tym roku, ale na wszelki wypadek przypomnę, że symbolu Σ (grecka wielka litera sigma) używa się do oznaczania sum:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Taka notacja często pozwala nam skrócić i ujednoznacznić zapis. Na przykład:

$$\sum_{n=3}^{k} n = 3 + 4 + 5 + \ldots + (k-1) + k.$$

$$\sum_{n=1}^{5} (2n-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2.$$

Wewnątrz sumy nie musi być odniesienia do literki według której sumujemy (tzw. licznika pętli).

$$\sum_{n=1}^{k} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = k.$$

Pod symbolem sumy może się znaleźć nieskończenie wiele elementów np.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.$$

Zauważmy, że w takiej sytuacji dodając kolejno tylko skończoną liczbę składników sumy (czyli biorąc najpierw pierwszy element, potem sumę pierwszych dwu, sumę pierwszych trzech itd.) również tworzymy pewien ciąg, który oczywiście może być zbieżny lub rozbieżny. Jeśli taki ciąg jest zbieżny, to nieskończona suma ma sens - jest granicą takiego ciągu sum częściowych. Czy to możliwe, by suma nieskończenie wielu elementów dawała skończoną wartość nawet przy założeniu, że wszystkie te elementy są dodatnie? Jak najbardziej:

Przykład (Matematyczny suchar) Nieskończenie wielu matematyków przychodzi do baru. Pierwszy mówi do barmana: „Poproszę jedno piwo". Drugi mówi: „Poproszę połowę tego, co pierwszy". Trzeci mówi: „Poproszę połowę tego co drugi". Zanim czwarty się odezwał, barman pyta: „ Czy wszyscy kolejni zamawiają połowę tego, co poprzedni?" i po otrzymaniu twierdzącej odpowiedzi nalewa... no właśnie, ile piw?

Z tego zadania wynika, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \ldots.$$

Oczywiście, istnieją też sumy, które dają nieskończoną wartość, jak choćby

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1$$

Sformalizujmy to pojęcie:

Definicja 4. Szeregiem *o wyrazie ogólnym* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nazywamy ciąg sum częściowych* S_k, *gdzie* $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. *Szereg taki oznaczamy symbolem* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Oczywiście, sumowanie może zaczynać się od innej liczby niż 1, ale nie zmienia to znacząco tego pojęcia.

Definicja 5. *Szereg nazywamy* zbieżnym *do liczby* S *jeśli ciąg sum częściowych* S_k *jest zbieżny do tej granicy. Liczbę* S *nazywamy sumą szeregu i zapisujemy* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. *Szereg, który nie jest zbieżny, nazywamy* rozbieżnym.

Może się wydawać, że mamy tu kolizję oznaczeń, bo przez $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oznaczamy zarówno szereg, jak i jego sumę (granicę). Po prostu taka jest tradycja tego oznaczenia i z kontekstu zawsze można odgadnąć o co chodzi, więc wyjątkowo taką kolizją się nie przejmujemy.

Przykłady szeregów zbieżnych i rozbieżnych:

Jeśli a_n nie jest zbieżny do 0, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie jest zbieżny.

To, że a_n jest zbieżny do 0, nie oznacza, ze $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Na przykład, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest szeregiem rozbieżnym. Z drugiej strony, dla każdego $\alpha > 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny.

III. Szeregi geometryczne i ich sumy

Generalnie, rozstrzygnięcie, czy jakiś szereg liczbowy jest zbieżny, czy rozbieżny, nie jest łatwe poza najprostszymi przypadkami (nie mówiąc już o obliczeniu, do czego konkretnie jest zbieżny). Jednym z niewielu wyjątków są szeregi geometryczne.

Definicja 6. *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ *tj. taki, że* a_n *jest ciągiem geometrycznym o ilorazie* q *nazywamy* szeregiem geometrycznym*.*

Twierdzenie 4. *Jeśli* $a_1 \neq 0$ *to szereg geometryczny* $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy* $|q| < 1$*. Wtedy* $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}$*.*

Przykład Formalne rozwiązanie suchara.