W tym rozdziale będziemy badać funkcję $f : \mathbb{R}^2 \supset D_f \to \mathbb{R}$ zmiennych (x, y). Zakładamy o niej, że jest dwukrotnie różniczkowalna (chyba, że jest wyraźnie napisane inaczej). Wyniki tego rozdziału można uogólnić na sytuację wielowymiarową, ale wymagałoby to paru technicznych poprawek. Idee, na których opiera się szukanie ekstremów warunkowych i globalnych pozostają podobne do dwuwymiarowych w dowolnej liczbie wymiarów.

Znajdowanie ekstremów lokalnych na $\mathbb{R}^n$ jest niezwykle użyteczne w zastosowaniach optymalizacyjnych. Jednakże, najczęściej mamy pewne ograniczenia narzucone na zmienne. Niestety, może się okazać, że optymalny wynik jest poza zasięgiem możliwości finansowych firmy (lub wcale nie istnieje - możliwe i prawdopodobne jest, że zysk będzie rósł w nieskończoność, gdy ilość zasobów do dyspozycji firmy będzie rosła do nieskończoności). Dlatego częściej stawianym pytaniem jest: jak zmaksymalizować (zminimalizować) pewną wielkość ekonomiczną pod warunkiem, że pewne założenia są spełnione. Szukamy wtedy tak zwanych ekstremów warunkowych.

I. Ekstrema warunkowe

Rozważamy ogólną sytuację: poszukujemy ekstremów funkcji f na zbiorze $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ dla pewnej funkcji różniczkowalnej g. Czasami z równania $g(x, y)$ możemy wyliczyć zależność x od y i w ten sposób przejść do wyznaczania ekstremum funkcji jednej zmiennej. Jednakże, w ogólnej sytuacji jest to niemożliwe. Wykorzystamy zatem metodę ogólną: tzw. mnożniki Lagrange'a.

Przykład Rozważmy konsumenta, dla którego użyteczność z koszyka dwu towarów x, y jest dana wzorem $u(x, y) = xy$. Wiemy, że jednostka towaru x kosztuje 4, a jednostka towaru y kosztuje 1. Załóżmy, że konsument ma do wydania na te towary 12. Ile jednostek pierwszego, a ile drugiego towaru powinien kupić, by zmaksymalizować użyteczność koszyka tych dóbr?

Zanim przejdziemy do rozwiązania problemu, musimy ściśle zdefiniować, czego właściwie szukamy.

Definicja 1. *Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0)* maksimum warunkowe *na zbiorze G jeśli $(x_0, y_0) \in G$ i*

$$\exists_{\delta>0} \forall_{(x,y) \in U_\delta(x_0,y_0) \cap G \setminus \{x_0,y_0\}} f(x, y) < f(x_0, y_0).$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum warunkowe *na zbiorze G jeśli $(x_0, y_0) \in G$ i*

$$\exists_{\delta>0} \forall_{(x,y) \in U_\delta(x_0,y_0) \cap G \setminus \{x_0,y_0\}} f(x, y) > f(x_0, y_0).$$

Jak zwykle, jeśli w definicji pojawiają się słabe nierówności, możemy mówić o słabym minimum/maksimum warunkowym.

By wyznaczyć ekstrema warunkowe, przeprowadzamy następującą procedurę:

A. Tworzymy funkcję pomocniczą (tzw. *funkcję Lagrange'a*) daną wzorem $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$. λ jest tutaj nową, pomocniczą zmienną zwaną *mnożnikiem Lagrange'a*.

B. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ F'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}.$$

Ekstrema warunkowe mogą istnieć tylko w punktach (x_0, y_0) takich, że dla pewnego λ_0, (x_0, y_0, λ_0) jest rozwiązaniem powyższego układu równań.

C. Wyznaczamy tzw. *obrzeżony hesjan* dany wzorem:

$$HO(x,y,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & g'_x(x,y) & g'_y(x,y) \\ g'_x(x,y) & F''_{xx}(x,y,\lambda) & F''_{xy}(x,y,\lambda) \\ g'_y(x,y) & F''_{yx}(x,y,\lambda) & F''_{yy}(x,y,\lambda) \end{bmatrix}$$

D. Obliczamy wyznacznik obrzeżonego hesjanu (czasem sam ten wyznacznik się nazywa obrzeżonym hesjanem) w punktach (x_0, y_0, λ_0), które są rozwiązaniami układu równań z punktu B.
Jeśli $\det HO(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ to w (x_0, y_0) istnieje maksimum warunkowe, a jeśli $\det HO(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ to w (x_0, y_0) istnieje minimum warunkowe. Jeśli $\det HO(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$ to istnienie ekstremum warunkowego w (x_0, y_0) musimy rozstrzygnąć innym sposobem.
Przykład Rozwiązanie problemu konsumenta.
Przykład Znaleźć ekstrema funkcji $f(x, y) = x^2+y^2-8y+3$ przy warunku $4x^2+y^2 = 36$.

II. Ekstrema globalne na zbiorze ograniczonym

Możemy poszukiwać również ekstremów globalnych funkcji na zbiorze zadanym w nieco bardziej skomplikowany sposób niż zbiór G.
Jeśli zbiór $K \subset \mathbb{R}^2$ jest domknięty (czyli wszystkie fragmenty brzegu tego zbioru do niego należą) i ograniczony (czyli zawiera się w jakimś kole o środku w $(0, 0)$ i skończonym promieniu) to funkcja f osiąga wartość najmniejszą i największą w zbiorze K (jest to twierdzenie analogiczne do twierdzenia Weierstrassa dla funkcji jednej zmiennej). Jeśli chcemy znaleźć te wartości, procedura postępowania jest następująca:
A. Wyznaczamy punkty, w których f może mieć ekstremum lokalne (przyrównując gradient do zera jak w rozdziale 11). Jeśli są w K, dopisujemy te punkty do listy „kandydatów na ekstrema globalne”
B. Staramy się zapisać brzeg zbioru K jako sumę krzywych, z których każdą możemy opisać jako $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ oraz punktów będących końcami tak opisanych krzywych („wierzchołków” zbioru). „Wierzchołki” dopisujemy do listy „kandydatów na ekstrema globalne”.
C. Na każdej z krzywych wyznaczonych w podpunkcie B, szukamy „kandydatów na ekstrema warunkowe” rozwiązując układ równań z punktu B procedury z sekcji I tego rozdziału. Jeśli punkty, w których ekstrema warunkowe mogą istnieć, są w zbiorze K - dopisujemy je do naszej listy.
W punkcie A i C nie musimy sprawdzać, czy faktycznie nasi kandydaci są ekstremami lokalnymi, bądź warunkowymi.
D. Obliczamy wartość f w każdym punkcie na liście „kandydatów”. Znajdujemy najmniejszą i największą wartość spośród nich. Jest to najmniejsza i największa wartość funkcji f na zbiorze K.
Przykład Rozwiązanie wcześniejszego problemu konsumenta przy założeniu, że nie musi wydawać całej kwoty. Z jakich koszyków dóbr miałby wtedy najmniejszą użyteczność?
Przykład Znaleźć ekstrema funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2 - 8y + 3$ na zbiorze $K = \{(x, y) : 4x^2 + y^2 \leq 36,\ y \geq 0\}$.

III. Szczególny przypadek: programowanie liniowe na zbiorze ograniczonym

Programowaniem liniowym nazywa się zagadnienie, w którym należy znaleźć rozwiązanie układu nierówności liniowych (tj. w przypadku dwuwymiarowym nierówności postaci $ax + by \leq c$ lub $ax + by \geq c$) dla których funkcja „liniowa” $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ osiąga najmniejszą lub największą wartość.
Rozważmy W - wielokąt na płaszczyźnie, czyli zbiór domknięty i ograniczony, zadany układem nierówności liniowych. Zgodnie z podrozdziałem II tego rozdziału możemy szukać na nim wartości najmniejszych i największych. Jednak w tej sytuacji nie musimy przechodzić przez całą przedstawioną wyżej procedurę. Zauważmy, ze funkcja „liniowa” nie posiada ekstremów lokalnych, więc podpunkt A procedury odpada. Z podobnej analizy wynika, że nie znajdziemy ekstremów warunkowych (silnych). Dlatego istotne

są wierzchołki naszego wielokąta. Procedura programowania liniowego dla wielokątów przebiega następująco:
A. Wyznaczyć wierzchołki wielokąta W.
B. Obliczyć wartości funkcji f w wierzchołkach wielokąta.
C1. Jeśli jedna z tych wartości jest największa, a inna najmniejsza - problem jest rozwiązany. Są to ekstrema globalne funkcji f na W.
C2. Jeśli największe/najmniejsze wartości znajdują się jednocześnie w dwu wierzchołkach wielokąta, to te wierzchołki są sąsiednie i największe/najmniejsze wartości w W są przyjmowane na krawędzi łączącej te wierzchołki. Wzdłuż tej krawędzi funkcja jest stała.
C3. Jeśli największe/najmniejsze wartości znajdują sie jednocześnie we wszystkich wierzchołkach wielokąta, to f jest stała na całym wielokącie W.
Przykład Pewna firma produkuje wyroby X i Y. Do produkcji wykorzystuje surowce I i II. By wyprodukować jednostkę wyrobu X potrzebne są: 1 jednostka surowca I i 2 jednostki surowca II. By wyprodukować jednostkę surowca Y potrzebne są: 2 jednostki surowca I i 1 jednostka surowca II. Jaki plan produkcji zapewni maksymalny zysk, jeśli firma dysponuje 6 jednostkami surowca I i 9 jednostkami surowca II i wiemy, że:
a) zysk z wytworzenia jednostki wyrobu X wynosi 4, a z wytworzenia jednostki wyrobu Y – 3?
b) zysk z wytworzenia jednostki wyrobu X wynosi 1, a z wytworzenia jednostki wyrobu Y – 2?

IV. Programowanie liniowe na zbiorach nieograniczonych

Zauważmy, że w definicji zagadnienia programowania liniowego nie ma wzmianki o tym, że zbiór opisany układem nierówności, na którym szukamy wartości ekstremalnych ma być ograniczony. Naturalnie, dla zbiorów nieograniczonych najmniejsza lub największa wartość może nie istnieć (bo nie są spełnione założenia twierdzenia Weierstrassa), ale procedura szukania ekstremów globalnych f jest bardzo podobna.
Procedura programowania liniowego dla zbiorów nieograniczonych przebiega następująco (opisuję tylko szukanie największej wartości - najmniejszej szukamy analogicznie):
A. Wyznaczyć wierzchołki (czyli punktach przecięcia prostych brzegowych) danego zbioru oraz te fragmenty prostych, które są nieograniczonymi częściami brzegu zbioru.
B. Obliczyć wartości funkcji f w „wierzchołkach” oraz w jednym punkcie na każdej nieograniczonej „krawędzi” brzegu (nie będącym wierzchołkiem zbioru) i uporządkować od największej do najmniejszej.
C1. Jeśli jedna z wartości w wierzchołkach jest największa, jest ona maksimum f na danym zbiorze. Jeśli jedyna największa wartość jest osiągana w punkcie na nieograniczonej krawędzi - to maksimum nie istnieje.
C2. Jeśli największe wartości znajdują się jednocześnie w dwu wierzchołkach wielokąta, to te wierzchołki są sąsiednie i największe wartości są przyjmowane na krawędzi łączącej te wierzchołki. Wzdłuż tej krawędzi funkcja jest stała. Jeśli największe wartości są jednocześnie przyjmowane w jednym z wierzchołków i w punkcie na krawędzi nieograniczonej, to największe wartości są przyjmowane na krawędzi nieograniczonej zawierającej te dwa punkty.
C3. Jeśli największe wartości znajdują sie jednocześnie w więcej niż dwóch z wybranych punktów, to f jest stała na całym zbiorze.
Przykład Znaleźć wartości największe i najmniejsze funkcji: $f(x, y) = x - 5y$ oraz $g(x, y) = 4x + 2y$ na zbiorze opisanym nierównościami: $x + 2y \leq 6$, $2x + y \leq 9$ i $x - 3y \geq -4$.