Skoro wiemy już jak liczyć pochodne funkcji wielu zmiennych, nadszedł czas na całki. W tym rozdziale będę rozważać tylko całki podwójne z funkcji dwu zmiennych. W razie potrzeby, podejście to łatwo można uogólnić na całki n-krotne z funkcji n zmiennych. Całki takie mają wiele zastosowań - szczególnie w statystyce i ekonometrii.

I. Definicje

Rozważamy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \supset D_f \to \mathbb{R}$ zmiennych x i y.

Definicja 1. *Ograniczony obszar $D \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy* regularnym*, gdy jego brzeg jest sumą skończonej liczby łuków krzywych danych równaniami postaci $y = y(x)$ dla $x \in [a, b]$ lub $x = x(y)$ dla $y \in [c, d]$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$, przy czym łuki te mogą redukować się do punktów.*

Całkowanie wielokrotne będziemy definiować właśnie na obszarach regularnych. Dla danego obszaru regularnego $D \subset \mathbb{R}^2$ definiujemy:

Definicja 2. *Przez $P_n = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ oznaczamy podział obszaru D na n domkniętych obszarów regularnych $D_1, D_2, \ldots, D_n$ o polach $|D_i|$ $(i = 1, \ldots, n)$ taki, że D_i, D_j dla $i \neq j$ nie mają wspólnych punktów wewnętrznych (mogą się stykać co najwyżej brzegami) oraz $D_1 \cup D_2 \cup \ldots D_n = D$.*
Liczbę $\delta_n = \max_{i \in \{1,\ldots n\}} \delta D_i$, gdzie δD_i oznacza średnicę zbioru D_i, czyli maksymalną odległość między punktami tego zbioru, nazywamy średnicą podziału P_n.
Ciąg podziałów $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obszaru regularnego D nazywamy normalnym, jeśli $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

Definicja 3. *(Całka podwójna) Niech f będzie funkcją określoną w obszarze regularnym D o ograniczonym zbiorze wartości. Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obszaru D, niezależnie od wyboru punktów wewnętrznych $(x_i, y_i) \in D_i$ w każdym podobszarze każdego podziału, granica $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)|D_i|$ istnieje i jest równa S to S nazywamy* całką podwójną *(w sensie Riemanna) z funkcji f na obszarze D i oznaczamy symbolem*

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Jeśli całka podwójna z funkcji f istnieje i jest skończona na obszarze D to funkcję f nazywamy całkowalną.

Dla funkcji wielu zmiennych również prawdziwe jest twierdzenie, że wszystkie funkcje ciągłe są całkowalne. Z definicji całki podwójnej natychmiast wynika, że można obliczać tę całkę po kawałkach zadanego obszaru i zsumować wyniki.

Twierdzenie 1. *Jeśli obszar regularny D jest sumą regularnych obszarów D_1 i D_2 o rozłącznych wnętrzach to:*

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x, y)\, dx\, dy,$$

oczywiście, o ile f jest całkowalna. Twierdzenie to można rozszerzyć na przypadek sumy dowolnej, skończonej liczby obszarów.

Na podstawie definicji trudno jednak wyznaczać wartość całki podwójnej. Do tego będziemy potrzebować dodatkowego narzędzia: całki iterowanej.

II. Całka iterowana

Definicja 4. *Ograniczony obszar $D \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy* normalnym względem osi OX*, jeśli daje się zapisać w postaci $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, gdzie φ_1, φ_2 są funkcjami ciągłymi na $[a, b]$.*
Ograniczony obszar $D \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy normalnym względem osi OY*, jeśli daje się zapisać w postaci $D = \{(x, y) : a \leq y \leq b, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$, gdzie φ_1, φ_2 są funkcjami ciągłymi na $[a, b]$.*

(Rysunek)
Oczywiście, każdy obszar normalny względem osi OX lub OY jest obszarem regularnym. W pewnym stopniu to twierdzenie można odwrócić.

Twierdzenie 2. *Każdy domknięty obszar regularny jest sumą skończonej liczby takich obszarów normalnych względem jednej z osi, które nie mają wspólnych punktów wewnętrznych.*

Twierdzenie 3. *Jeśli funkcja f jest ciągła na obszarze D normalnym względem osi OX i $D = \{(x,y) : a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$, to*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right] dx.$$

Jeśli funkcja f jest ciągła na obszarze D normalnym względem osi OY i $D = \{(x,y) : a \le y \le b, \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)\}$, to

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx\right] dy.$$

Jak widać, obliczanie całki wielokrotnej można zamienić na obliczanie dwóch całek oznaczonych jednej zmiennej, z czego jednej z nich z parametrem. A to już umiemy (a przynajmniej taką mamy nadzieję).
Przykład Całka podwójna z funkcji $f(x,y) = x + xy$ po obszarze będącym trójkątem o wierzchołkach $(1,-1)$, $(2,2)$ i $(0,2)$.
Całka podwójna z funkcji $f(x) = \frac{y}{x}$ po zbiorze ograniczonym krzywymi o równaniach $y = 1$, $x = 1$, $y = \ln x$.

III. Interpretacja

Całka podwójna ma interpretację geometryczną analogiczną do interpretacji całki oznaczonej funkcji jednej zmiennej. Tym razem, zamiast pola powierzchni figury płaskiej możemy obliczyć objętość pewnej bryły.

Twierdzenie 4. *Objętość obszaru przestrzennego ograniczonego wykresem ciągłej i nieujemnej funkcji f określonej na obszarze regularnym D od góry, oraz płaszczyzną Oxy od dołu jest równa całce podwójnej z funkcji f po obszarze D.*