I. Motywacja

Dotychczas badaliśmy głównie zachowanie funkcji jednej zmiennej, czyli zjawisk (np. ekonomicznych) zależących tylko od jednego czynnika. Oczywiście, sytuacje, w których jakieś zjawisko zależy tylko od jednej rzeczy zdarzają się w rzeczywistości bardzo rzadko. Już na początku roku, przy okazji omawiania relacji, rozważaliśmy funkcje użyteczności zależne od dwu zmiennych. Tutaj rozwiniemy analizę podejścia tego typu. Najczęściej będziemy omawiać przykłady funkcji 2 i 3 zmiennych (ze względów czysto praktycznych - czasu prowadzenia obliczeń), ale łatwo będzie te rozważania przenieść na przypadek dowolnej, skończonej liczby wymiarów.

II. Funkcje wielu zmiennych - wstęp

Rozważamy przestrzeń $\mathbb{R}^n$, złożoną z wektorów n-wymiarowych, które będziemy nazywać punktami. W naturalny sposób, możemy te punkty sumować i odejmować. Na algebrze poznaliśmy wzór na długość wektora - i tu powinniśmy nadal o nim pamiętać. Rozważamy funkcję $f : \mathbb{R}^n \supset D_f \to \mathbb{R}$. Oczywiście, jak w przypadku jednej zmiennej, by zdefiniować porządnie taką funkcję musimy podać nie tylko jej wzór, ale też jej dziedzinę. Jeśli dziedzina nie jest podana, naturalną dziedzinę funkcji wyznaczamy tak jak w przypadku funkcji jednej zmiennej (zwracając uwagę na ułamki, pierwiastki, funkcje logarytmiczne itp., a następnie rozwiązując odpowiednie nierówności).

Rysowanie wykresów funkcji wielu zmiennych jest znacznie trudniejsze niż jednej zmiennej. W przypadku funkcji dwu zmiennych, najczęściej rysuje się „mapę" opierającą się na poziomicach funkcji, czyli krzywych łączących punkty, w których funkcja przyjmuje tę samą wartość.

Przykłady $f(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$, $f(x, y) = x - y$.

Sformułujemy teraz kilka definicji analogicznych do dotychczasowych:

Definicja 1. Otoczeniem *punktu* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *o promieniu* $\delta > 0$ *nazywamy zbiór* $U_\delta(a) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : ||x - a|| < \delta\}$.

Definicja 2. Granicą *funkcji* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *w punkcie* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *nazywamy taką liczbę* g*, że:*

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in U_\delta(a)} : |f(x) - g| < \epsilon.$$

Zapisujemy $\lim_{x \to a} f(x) = g$.

Analogicznie definiujemy granice równe $\pm\infty$.

Definicja 3. *Funkcja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *określona w otoczeniu punktu* a *jest* ciągła *w tym punkcie, jeśli* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *jest* ciągła*, jeśli jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.*

Podobnie jak w wypadku funkcji jednej zmiennej, wszystkie funkcje powstałe przez podstawowe działania na funkcjach elementarnych są ciągłe.

III. Pochodne cząstkowe

Dla funkcji wielu zmiennych istnieje formalne pojęcie pochodnej i różniczkowalności, jednak nie jest ono nam potrzebne dla podstawowych zastosowań. Dlatego skupimy swą uwagę na pochodnych cząstkowych funkcji wielu zmiennych.

Definicja 4. *Niech* $f : \mathbb{R}^n \supset D_f \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją zmiennych* $(x_1, \ldots, x_n)$ *i* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D_f$. *Wtedy* pochodną cząstkową f względem zmiennej x_k w punkcie a *nazywamy granicę (o ile istnieje i jest skończona):*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_k + h, \ldots, a_n) - f(a)}{h}.$$

Oznaczamy ją przez $f'_{x_k}(a)$ *lub* $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$. *Zazwyczaj będę używać tej pierwszej notacji.*

Będziemy mówić, że f jest *różniczkowalna w punkcie* a, jeśli posiada pochodne cząstkowe względem każdej ze zmiennych w tym punkcie. f jest *różniczkowalna* jeśli posiada pochodne cząstkowe względem każdej ze zmiennych w każdym punkcie swojej dziedziny. Pochodne cząstkowe obliczamy tak jak pochodne funkcji jednej zmiennej, przy czym wszystkie zmienne poza tą, względem której pochodną cząstkową liczymy, traktujemy jako parametry.
Przykład $f(x,y,z) = z^3 - 2xz^2 + x^2y + y^2 - 2xy + 3x - 1$.
Podobnie jak w wypadku funkcji jednej zmiennej, możemy zdefiniować pochodne wyższych rzędów. Na tym wykładzie nie będziemy się zajmować pochodnymi cząstkowymi rzędu wyższego niż 2, więc tylko takie pochodne zdefiniujemy:

Definicja 5. *(Pochodne cząstkowe drugiego rzędu - tzw. drugie pochodne) $f''_{x_kx_j}(a) = [(f'_{x_k})'_{x_j}](a)$. W innym zapisie $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a) = [\frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}}{\partial x_j}](a)$ (dla uproszczenia $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k}(a)$ zapisujemy $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(a)$).*

Przykład $f(x,y,z) = z^3 - 2xz^2 + x^2y + y^2 - 2xy + 3x - 1$.
Drugie pochodne często zapisuje się w postaci macierzy, tzw. *hesjanu* (macierzy *Hessego*).

Twierdzenie 1 (O równości pochodnych mieszanych)**.** *Jeśli funkcja f ma w punkcie a pochodne cząstkowe drugiego rzędu i są one ciągłe to wówczas kolejność różniczkowania nie ma znaczenia, czyli pochodne „mieszane" drugiego rzędu są równe tj.:*

$$f''_{x_kx_j}(a) = f''_{x_jx_k}(a).$$

IV. Różniczka funkcji wielu zmiennych
Podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, dzięki pochodnym cząstkowym i lekko zmodyfikowanej definicji różniczki, potrafimy obliczyć przybliżone wartości funkcji „w okolicy" punktu, w którym jej wartość znamy.

Definicja 6. *Jeśli funkcja f w punkcie $a = (a_1, \ldots, a_n)$ posiada pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, to jej* różniczką *w pobliżu punktu a nazywamy nazywamy funkcję $df_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, która przyrostowi argumentu $\Delta a = (\Delta a_1, \ldots, \Delta a_n)$ przypisuje wartość $df_a(\Delta a) = f'_{x_1}(a) \cdot \Delta a_1 + f'_{x_2}(a) \cdot \Delta a_2 + \ldots + f'_{x_n}(a) \cdot \Delta a_n$.*

Twierdzenie 2. *Jeśli funkcja f w punkcie $a = (a_1, \ldots, a_n)$ posiada pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, to dla niewielkich przyrostów $\Delta a = (\Delta a_1, \ldots, \Delta a_n)$ możemy oszacować:*

$$f(a + \Delta a) \approx f(a) + df_a(\Delta a).$$

Przykład $(2,99)^{2,02}$.

V. Interpretacje ekonomiczne pochodnych cząstkowych
Wartości krańcowe
Podobnie jak w wypadku funkcji jednej zmiennej, możemy analizować wartości krańcowe i elastyczności funkcji. Załóżmy, że funkcja n zmiennych f, posiadająca pochodne cząstkowe pierwszego rzędu, reprezentuje reakcję jakiejś wielkości ekonomicznej na zmiany wartości czynników $x_1, \ldots, x_n$ i $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Wtedy $f'_{x_i}(a)$ jest wartością krańcową tej wielkości (np. popytem krańcowym, podażą krańcową, produktywnością krańcową, dochodem krańcowym, kosztem krańcowym itp.) ze względu na zmianę wielkości x_i.
Wielkość ta mówi, o ile (w przybliżeniu) wzrośnie (lub zmaleje, jeśli znak wyniku jest ujemny) dana wielkość ($f(x)$) gdy i-ta współrzędna wektora czynników wzrośnie o jednostkę z ustalonego poziomu wszystkich czynników a.
W porównaniu z zadaniami na ten temat z funkcji jednej zmiennej, w interpretacji wyniku zawsze musimy dopisać ze względu na jaki czynnik obliczamy krańcowość.
Elastyczność
Również elastyczność ze względu na i-tą zmienną definiujemy podobnie, jak w przypadku jednej zmiennej.

Definicja 7. *Stosunek wartości krańcowej* $f'_{x_i}(a)$ *do wartości średniej* $\frac{f(a)}{a_i}$ *tej funkcji w tym punkcie nazywa się* elastycznością *funkcji* f *w punkcie* a *ze względu na zmienną* x_i*. Wzorem zapisujemy:*

$$E_{x_i}f(a) = \frac{a_i}{f(a)} \cdot f'_{x_i}(a).$$

Interpretuje się ją jako przybliżoną wartość stosunku ***względnego*** *(czyli wyrażonego w procentach) przyrostu wartości funkcji* f *do* ***względnego*** *przyrostu wartości argumentu* x_i *w pobliżu punktu* a*.*

Innymi słowy, wielkość ta mówi, o ile **procent** (w przybliżeniu) wzrośnie (lub zmaleje, jeśli znak wyniku jest ujemny) dana wielkość (f) gdy x_i wzrośnie o 1% z ustalonego poziomu wszystkich czynników a.
W porównaniu z zadaniami na ten temat z funkcji jednej zmiennej, w interpretacji wyniku zawsze musimy dopisać ze względu na jaki czynnik obliczamy elastyczność.