W tym rozdziale będziemy nadal badać funkcje dwóch zmiennych (x, y) ze względu na łatwość zapisu. Wyniki tego rozdziału można uogólnić na sytuację wielowymiarową (i będzie to wykorzystywane na ćwiczeniach), ale wymagałoby to paru technicznych poprawek. Idee tu przedstawione pozostają podobne do dwuwymiarowych w dowolnej liczbie wymiarów.

I. Reguła łańcuchowa

Przykład Załóżmy, że przedsiębiorstwo przy zatrudnieniu wielkości l wytwarza dwa półprodukty w ilości $q_1(l)$ i $q_2(l)$. Półprodukty te są używane w dalszej produkcji, która przynosi dochód zadany funkcją $R(q_1, q_2)$. Zauważmy, że skoro q_1 i q_2 jest funkcją l, to w istocie R też można wyrazić jako funkcję jednej zmiennej l. Jak zmienia się dochód w zależności od zatrudnienia, czyli jak policzyć pochodną $R'(l)$, mając dane pochodne $q_1'(l)$, $q_2'(l)$ oraz pochodne cząstkowe R'_{q_1}, R'_{q_2}?
Możemy skorzystać ze wzoru, będącego odpowiednikiem formuły na różniczkowanie funkcji złożonej dla jednej zmiennej. Niech f będzie funkcją różniczkowalną dwóch zmiennych, a zmienne x i y same będą zależne od jednej zmiennej t. Wtedy:

$$f'(t_0) = f'_x(x(t_0)) \cdot x'(t_0) + f'_y(y(t_0)) \cdot y'(t_0).$$

Wzór ten, zapisywany częściej w postaci $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$, zwany jest *regułą łańcuchową*.
Przykład Jak wyżej, dla $R(q_1, q_2) = q_1 q_2$, $q_1(l) = l^{\frac{1}{4}}$, $q_2 = l^{\frac{1}{2}}$.
Najważniejsze zastosowanie reguły łańcuchowej pojawia się w sytuacji, gdy potrzebujemy znaleźć pochodną funkcji $y'(x)$, gdy nie mamy podanego jawnie wzoru tej funkcji.
Przykład Rozważaliśmy już kiedyś równanie dochodu narodowego (w uproszczonej wersji): $Y = C(Y) + I$. Przy okazji linearyzacji i pochodnej jednej zmiennej obliczyliśmy pochodną $Y'(I)$. Teraz możemy to zrobić prościej dzięki regule łańcuchowej.

II. Funkcje w postaci uwikłanej

Z reguły łańcuchowej można wyprowadzić ogólniejsze twierdzenie, które pozwala nam obliczyć pochodną funkcji, której postaci nie mamy danej.
Przykład Rozważmy funkcję $y(x)$, o której wiemy tylko, że spełnia równanie $y^2(x) - x^3 - x^2 = 0$. Jak obliczyć jej pochodną i znaleźć jej ekstrema?
W takich sytuacjach mówimy, że funkcja jest dana w postaci uwikłanej. Możemy korzystać z twierdzenia:

Twierdzenie 1 (Twierdzenie o funkcji uwikłanej)**.** *Jeżeli funkcja $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna i dla pewnego punktu $(x_0, y_0) \in D_f$ spełnia warunki: $f(x_0, y_0) = 0$ oraz $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ to w pewnym otoczeniu $U_\epsilon(x_0)$ punktu x_0 istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła $y(x)$, spełniająca warunki $y_0 = y(x_0)$ oraz $f(x, y(x)) = 0$ dla x z tego otoczenia.*
Ponadto, funkcja uwikłana $y(x)$ ma ciągłą pochodną daną wzorem

$$y'(x) = -\frac{f'_x(x, y(x))}{f'_y(x, y(x))}.$$

Najbardziej znanym zastosowaniem twierdzenia o funkcji uwikłanej w ekonomii jest...
Stopa substytucji
Rozważmy funkcję użyteczności u konsumenta (lub producenta) z posiadania koszyka n dóbr $(x_1, \dots, x_n)$. Konstruowaliśmy krańcową stopę substytucji jednego towaru przez drugi za pomocą pochodnych funkcji jednej zmiennej, której wykresem była odpowiednia krzywa obojętności. Teraz, dzięki twierdzeniu o funkcji uwikłanej, możemy skonstruować bardziej naturalne podejście.

Definicja 1. Krańcową stopą substytucji *towaru i-tego przez towar j-ty dla koszyka dóbr a nazywamy wyrażenie:*

$$s_{ij}(a) = \frac{u'_{x_i}(a)}{u'_{x_j}(a)}.$$

Krańcowa stopa substytucji mówi, o ile (w przybliżeniu) jednostek należy zwiekszyć ilość j-ego towaru w koszyku a, gdy ilość i-tego towaru w tym koszyku zmniejszy się o jednostkę, aby użyteczność koszyka się nie zmieniła. Czyli bardziej potocznie: ile jednostek towaru j jest dla konsumenta wybierającego koszyk a warta jednostka towaru i.

Definicja 2. Elastycznością substytucji *towaru i-tego przez towar j-ty dla koszyka dóbr a nazywamy wyrażenie:*

$$\varepsilon_{ij}(a) = s_{ij}(a) \cdot \frac{a_i}{a_j} = \frac{a_i \cdot u'_{x_i}(a)}{a_j \cdot u'_{x_j}(a)}.$$

Wielkość ta informuje, o ile (w przybliżeniu) procent należy zwiększyć w koszyku a ilość j-tego towaru, przy zmniejszeniu w tym koszyku ilości i-tego towaru o jeden procent tak, by użyteczność koszyka pozostała taka sama.
Przykład $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{xy^3} + \frac{1}{2}y$ w punkcie $(x_0, y_0) = (16, 81)$.

III. Funkcje jednorodne i lemat Eulera
Niech f będzie różniczkowalną funkcją dwóch zmiennych x i y (acz zarówno definicja jak i lemat Eulera przenosi się z łatwością na n zmiennych).

Definicja 3. *f nazywamy* funkcją jednorodną *stopnia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jeśli dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ i $t > 0$ zachodzi warunek $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$.*

Przykład Odwzorowania liniowe.
Przykład Wielomiany jednorodne.
Przykład Funkcje „liniowe" (afiniczne) nie są jednorodne, jeśli ich wyraz wolny jest niezerowy.
Funkcje jednorodne są ważne w ekonomicznych modelach produkcji (np. wspomniane już przy okazji relacji funkcje Cobba-Douglasa). W podanych przykładach łatwo było ustalić jednorodność. W ogólnym przypadku zapis funkcji może być na tyle skomplikowany, że trudno rozstrzygnąć, czy jest ona jednorodna, czy nie (zwłaszcza udowodnienie, że nie jest jednorodna sprawia kłopoty, bo trzeba wyeliminować wszystkie możliwe współczynniki α). Pomoże nam w tym następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2 (Lemat Eulera)**.** *Przy dotychczasowych założeniach, funkcja f jest jednorodna stopnia α wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $(x, y) \in D_f$ zachodzi:*

$$\alpha f(x, y) = x \cdot f'_x(x, y) + y \cdot f'_y(x, y).$$

Przykład $f(x, y, z) = \frac{x^3}{\sqrt{y}} + \sqrt{xy^3 z}$.
Przykład Funkcje ze stałą zależnością od skali: Niech $F(K, L)$ określa poziom produkcji w zależności od nakładów kapitału K i pracy L. Jeśli jest to funkcja jednorodna stopnia 1, to mówimy, że produkcja charakteryzuje się stałą zależnością od skali.
Zgodnie z lematem Eulera, w tej sytuacji produkcja równoważy zapotrzebowanie na jej czynniki wtedy i tylko wtedy gdy cena każdego z czynników produkcji jest równa produktywności krańcowej tego czynnika (tę obserwację nazywa się *twierdzeniem Clarka-Wicksella*). Ze względu na fakt, że takie zachowanie cen było obserwowane w warunkach zbliżonych do doskonałej konkurencji, kiedyś wyciągano z tego wniosek, że funkcje produkcji muszą być jednorodne stopnia 1 (jak zwykle, rzeczywistość jest trochę bardziej skomplikowana niż najprostsze modele matematyczne, ale i z tego założenia trochę informacji o świecie rzeczywistym można było uzyskać).