Analiza matematyczna - 3. Pochodne: definicje, sposoby obliczania i podstawowe interpretacje ekonomiczne.

Pochodna jest narzędziem do mierzenia chwilowej prędkości zmian wartości danej funkcji. Jest to bardzo wygodne narzędzie, gdyż po pierwsze dzięki niej możemy uzyskać wiele kluczowych informacji o funkcji, której wzór już mamy, a po drugie, możemy zapisać różne wymagania dotyczące funkcji szukanej, gdy mamy tylko wiedzę o prędkości jej zmian.

Przykład. *Fizyka* Prędkość - pochodna funkcji drogi od czasu. Przyspieszenie - pochodna prędkości względem czasu. Siła działająca na ciało - pochodna pędu względem czasu, albo pracy względem przesunięcia. Moc - pochodna pracy względem czasu. Natężenie prądu - pochodna funkcji przepływającego ładunku względem czasu. Siła elektromotoryczna - pochodna strumienia wektora indukcji magnetycznej względem czasu.

Przykład. *Ekonomia - wartości krańcowe* Przykład z rozdziału 1: koszt krańcowy jako chwilowa prędkość wzrostu kosztu w zależności od wielkości produkcji. Inne wartości krańcowe: podaż, popyt, użyteczność, przychód, dochód itp.

Przykład. *Ekonomia - elastyczność* Na przykładzie elastyczności cenowej popytu - popyt krańcowy przez popyt średni. Dochód $R = pQ(p)$. Kiedy ten dochód wzrasta, w zależności od zmian ceny? (odpowiedź - później).

I. Definicja

Definicja 1. *Niech $x \in \mathbb{R}$. Niech f będzie taką funkcją o wartościach rzeczywistych, że x wraz z pewnym swoim otoczeniem (czyli przedziałem otwartym zawierającym x) zawiera się w D_f. Jeśli istnieje skończona (tj. różna od $\pm\infty$) granica tzw.* ilorazu różnicowego*:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

to nazywamy ją pochodną funkcji f w punkcie x *i oznaczamy ją symbolem $f'(x)$. Mówimy też wtedy, że f jest* różniczkowalna w x.

Definicja 2. *Funkcja f jest* różniczkowalna*, gdy jest różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny.*

Przykład. Różniczkowalność z definicji: $f(x) = x^2$.

Twierdzenie 1. *Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w jakimś punkcie, to jest też w nim ciągła. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.*

Przykład. Różniczkowalność z definicji: $f(x) = |x|$.

II. Obliczanie pochodnych. Pochodne wyższych rzędów

Funkcje elementarne są różniczkowalne w każdym przedziale otwartym, zawartym w dziedzinie danej funkcji. Wzory na pochodne kilku podstawowych funkcji znajdują się w tabelce poniżej:

Pochodne kilku najważniejszych funkcji: $(c, r \in \mathbb{R})$

$f(x) \equiv$	c	x	x^r	$\sin x$	$\cos x$	a^x	e^x	$\log_a x$	$\ln x$
$f'(x) \equiv$	0	1	rx^{r-1}	$\cos x$	$-\sin x$	$a^x \ln a$	e^x	$\frac{1}{x \ln a}$	$\frac{1}{x}$

Dla bardziej skomplikowanych funkcji, pochodne możemy wyznaczać na podstawie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2. *Dla dowolnych funkcji różniczkowalnych zachodzą następujące wzory:*

1) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$, *2)* $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,

3) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, *4)* $[\lambda \cdot f(x)]' = \lambda \cdot f'(x)$, *dla* $\lambda \in \mathbb{R}$

5) $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, *6)* $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Przykład Kilka przykładowych wzorów, które otrzymamy z pierwszej tabelki i twierdzenia 2:

$f(x)$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
$f'(x)$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Przykłady

Definicja 3. Drugą pochodną *funkcji f nazywamy pochodną pierwszej pochodnej (czyli po prostu pochodnej) tej samej funkcji. Zapisujemy $f''(x) = (f')'(x)$.*

Analogicznie możemy zdefiniować wyższe pochodne: n-tą pochodną funkcji f nazywamy pochodną jej $(n-1)$-szej pochodnej. Jednakże nie będziemy zbyt często (może poza końcówką wykładu) używać pochodnych wyższych niż druga.

Przykłady

III. Pierwsze zastosowanie - linearyzacja, różniczka, obliczenia przybliżone

Jak mówiliśmy na początku, obliczenie pochodnej pozwala na zdobycie informacji o tempie przyrostu danej funkcji. W jaki sposób jedna informacja przekłada się na drugą? Otóż na podstawie twierdzenia:

Twierdzenie 3. *Pochodna funkcji $f'(x)$ równa się tangensowi kąta między osią Ox a styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x, f(x))$, czyli współczynnikowi kierunkowemu tej prostej stycznej.*

Dzięki temu wiemy, że:

Twierdzenie 4. *Jeśli pochodna funkcji f w jakimś przedziale jest dodatnia, to funkcja f jest w tym przedziale rosnąca. Jeśli pochodna funkcji f w jakimś przedziale jest ujemna, to funkcja f jest w tym przedziale malejąca.*

Szczegółowo tym twierdzeniem zajmiemy się w części 5 wykładu. Zauważmy jeszcze, że im większa jest wartość pochodnej danej funkcji to tym szybciej dana funkcja rośnie (gdy pochodna jest dodatnia) lub tym wolniej maleje (jeśli pochodna jest ujemna)

Przykład

Prosta styczna do wykresu jest w pewnym (zazwyczaj małym) otoczeniu „bardzo podobna” do wykresu, a współrzędne punktów na tej prostej oblicza się dużo łatwiej niż na wykresie funkcji. Dlatego możemy w dobrym przybliżeniu obliczać wartości funkcji „w okolicy” punktu, w którym jej wartość znamy, dzięki *różniczce*, czyli „liniowemu” przybliżeniu naszej funkcji.

Definicja 4. *Niech funkcja f ma pochodną w punkcie x_0.* Różniczką *funkcji f w pobliżu punktu x_0 nazywamy funkcję $df_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która przyrostowi argumentu $\Delta x = x - x_0$ przypisuje wartość $df_{x_0}(\Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x$.*

Twierdzenie 5. *Jeśli f jest różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0, to dla x w małym otoczeniu punktu x_0 zachodzi przybliżony wzór:*

$$f(x) \approx f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Przykłady

Możliwość lokalnego przybliżania skomplikowanej funkcji funkcją liniową jest często wykorzystywana w modelach ekonomicznych.

Przykład. Reguła 70/72, czyli jak podwoić swoje pieniądze? Przypuśćmy, że kapitał K złożono w banku zapewniającym oprocentowanie $r \in [0, 1]$ (normalnie wyrażane w procentach, tutaj liczbowo, jako ułamek) w skali roku. Ile czasu potrzeba, by kapitał się podwoił?

Przykład. Linearyzacja prostego modelu zagregowanego dochodu narodowego i krańcowa skłonność do konsumpcji.

Załóżmy, że konsumpcja C zależy od produktu krajowego brutto Y. W gospodarce zamkniętej (bez zewnętrznych źródeł dochodów) można założyć, że dochód rozdziela się

pomiędzy konsumpcję, inwestycje (I) i wydatki rządowe (G), czyli: $Y = C(Y) + I + G$. Jak zmienia się Y przy zmianie I lub G (nie jest to prosta zależność, bo równolegle zmienia się $C(Y)$!)?
Dodatkowe wyjaśnienie. Dlaczego w poprzednim przykładzie $0 < m < 1$?

IV. Podstawowe interpretacje ekonomiczne

Wartości krańcowe

Wracamy do przykładu z kosztem krańcowym z rozdziału o granicach funkcji. Zauważmy, że granica tam występująca to właśnie pochodna.
Generalnie: średnią reakcję wyniku dowolnego procesu ekonomicznego f na przyrost czynnika x o h z punktu x_0 możemy wyrazić jako $\frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$. Jeśli przyjmie się, że czynnik x jest nieskończenie podzielny (zazwyczaj nie zaburza to modelu, o ile wartości, na których operujemy, są duże) to można założyć, że h zmierza do 0 i zamiast ilorazu różnicowego otrzymamy pochodną w punkcie x_0, która w tym kontekście jest *krańcowym wynikiem działania czynnika x*.
Wielkość ta mówi, o ile (w przybliżeniu) wzrośnie (lub zmaleje, jeśli znak wyniku jest ujemny) dana wielkość (f) gdy x wzrośnie o jednostkę z poziomu x_0.
Przykłady. Koszt krańcowy (w zależności od wielkości produkcji), produkt krańcowy (w zależności od nakładów) i prawo malejących przychodów, popyt krańcowy (w zależności od ceny lub dochodów danej grupy), podaż krańcowa (w zależności od ceny), krańcowa skłonność do konsumpcji i oszczędzania,
Przykład. Krańcowa użyteczność (prawo Gossena malejącej użyteczności krańcowej).
Uwaga do ostatniego przykładu Tu ponownie należy zwrócić uwagę na nieporównywalność użyteczności różnych osób: to, że wzrost stanu posiadania o jednostkę dobra spowoduje większy wzrost użyteczności dla konsumenta A, gdy ma on 10 jednostek niż gdy ma 100 jednostek, nie oznacza, że wzrost użyteczności z dodatkowej posiadanej jednostki dobra jest większy dla konsumenta A, który ma 10 jednostek dobra niż dla konsumenta B, który ma 100 jednostek dobra. (przykład analogiczny do IV części wstępu).
Dodatkowe wyjaśnienie. Krańcowość i „marginalność".
Zadania. Typowe zadanie z tego tematu: jest dana zależność funkcyjna wielkości ekonomicznych np. produktu od nakładów. Obliczyć wartość krańcową dla podanego argumentu i zinterpretować. Załóżmy, że obliczona wartość produktu krańcowego wynosi 6 dla wielkości nakładów 1000. Wtedy interpretacja wyniku powinna brzmieć tak:
Jeżeli wielkość *nakładów* z poziomu *1000* wzrośnie o 1 jednostkę, to wielkość *produktu* **wzrośnie** o *6* jednostek (elementy tego zdania zapisane kursywą oczywiście zmieniamy w zależności od treści i wyniku zadania, a słowo wzrośnie zmieniamy na zmaleje jeśli wynik jest ujemny).
Zwracam uwagę, że w interpretacji nie pojawia się nigdzie sformułowanie produkt krańcowy (w szczególności tam, gdzie jest napisane produkt). W istocie bowiem, produkt krańcowy jest wynikiem pomocniczym, który jest nam potrzebny, by zinterpretować informacje o produkcie (całkowitym).

Elastyczność

Przykład Wracamy do przykładu z początku wykładu. Dochód $R(p) = pQ(p)$. Będzie on rósł przy wzroście cen tylko, gdy odpowiednia pochodna jest dodatnia. Stąd otrzymamy nowy miernik reakcji dochodu na zmianę ceny: elastyczność cenową popytu. (rysunek)

Definicja 5. *Niech f będzie funkcją rzeczywistą, różniczkowalną, a punkt x_0 należy do jej dziedziny. Stosunek wartości krańcowej $f'(x_0)$ do wartości średniej $\frac{f(x_0)}{x_0}$ tej funkcji w tym punkcie nazywa się* elastycznością *funkcji f w punkcie x_0. Wzorem zapisujemy:*

$$E_x f(x_0) = \frac{x_0}{f(x_0)} \cdot f'(x_0).$$

Interpretuje się ją jako przybliżoną wartość stosunku ***względnego*** *(czyli wyrażonego w procentach) przyrostu wartości funkcji f do* ***względnego*** *przyrostu wartości argumentu x w pobliżu punktu x_0.*

Innymi słowy, wielkość ta mówi, o ile **procent** (w przybliżeniu) wzrośnie (lub zmaleje, jeśli znak wyniku jest ujemny) dana wielkość (f) gdy x wzrośnie o 1% z poziomu x_0.
Mówi się też, że funkcja f jest *nieelastyczna*, jeśli $|E_x f| < 1$ lub, że jest *silnie elastyczna*, jeśli $|E_x f| > 1$. Tych określeń używa się najczęściej, jeśli te nierówności są wyraźne. Jeśli wartość elastyczności wynosi lub jest bliska 1, to mówi się o funkcji neutralnej. W skrajnych przypadkach wyników w okolicy 0 lub ∞ mówimy o funkcji sztywnej/doskonale elastycznej.
Reguła mówiąca o tym, że nieelastyczność cenowa popytu przy wzroście ceny prowadzi do wzrotu przychodu nazywa się regułą **Amoroso-Robinson**. Jej prawidłowość wynika właśnie z twierdzenia wiążącego monotoniczność funkcji ze znakiem jej pochodnej.
Przykład.
Zadania. Przed chwilą mieliśmy do czynienia z typowym (choć łatwym) zadaniem z tego tematu. Dla takich zadań interpretacja wyniku powinna brzmieć mniej więcej tak: Jeżeli wielkość *ceny* z poziomu *500* wzrośnie o 1%, to wielkość *popytu* **zmaleje** o *0,33*%. Popyt jest *nieelastyczny* ze względu na cenę. (elementy tego zdania zapisane kurysywą oczywiście zmieniamy w zależności od treści i wyniku zadania, a słowo zmaleje zmieniamy na wzrośnie jeśli wynik jest dodatni, podobnie dostosowujemy do wyniku słowo nieelastyczny).
Przykłady. Inne rodzaje elastyczności spotykane w ekonomii: elastyczność produkcji względem nakładów, elastyczność kosztu całkowitego produkcji, elastyczność dochodowa popytu, elastyczność dochodowa konsumpcji.