Celem tej części wykładu jest uściślenie, co rozumiemy przez stwierdzenie, że jakaś zmienna ekonomiczna zachowuje się w pewien sposób „w przybliżeniu” bądź „w granicy”.
Przykład. *Koszt średni przy dużej skali produkcji.* Niech k oznacza koszty stałe wyprodukowania pewnej ilości towaru, a koszty zmienne są proporcjonalne do wielkości produkcji q przy współczynniku przzoporcjonalności v, czyli $C(q) = vq + k$. Ile wynosi koszt średni $AC = \frac{C(q)}{q}$ wyprodukowania jednostki towaru przy bardzo dużej skali produkcji? (wykres, przykładowe liczby, co oznacza duża skala)
Przykład. Poprawka do pierwszego przykładu: koszty zmienne rosną szybciej przy produkcji dużej niż małej. Na przykład: $C(q) = (Aq + B)q + k$. Co teraz? (asymptota)
Przykład. *Koszt krańcowy (rentowność produkcji).* Niech $C(q) = \frac{1}{10}q^2 + 3q + 500$ będzie funkcją kosztu produkcji pewnego dobra w ilości q. Obecna wielkość produkcji wynosi 100, a cena rynkowa 20. Czy opłacalne jest zwiększenie produkcji (przy założeniu, że znajdzie ona zbyt po tej samej cenie)? (koszt średni całej produkcji, średni koszt dodatkowej produkcji)

I. Definicje.

Rozważamy funkcje, których dziedziną i przeciwdziedziną jest pewien podzbiór $\mathbb{R}$ (dla innych funkcji definicje są bardzo podobne, jednak w ramach tego kursu praktycznie nie będziemy się nimi zajmować).

Definicja 1. Granicą *funkcji f w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę g taką, że* $\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}|f(x) - g| < \epsilon$. *Oznaczamy ją przez* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. *Potocznie mówimy, że w punkcie x_0 funkcja f dąży do g.*

Idea tej definicji jest następująca: jeśli weźmiemy jakiś punkt x „bardzo blisko” punktu x_0 to wartość $f(x)$ nie będzie daleko od g. Graficznie możemy zinterpretować, że „w pobliżu” x_0 wykres funkcji musi się zawierać w pewnym poziomym pasie otaczającym prostą $y = g$.
Teraz musimy tę definicję liczbową rozszerzyć na przypadki związane z nieskończonością. (rysunek) Definicje dla $+\infty$ i $-\infty$ są niemal identyczne, zatem będą zawarte w tej samej definicji. Definicja odczytana bez nawiasów mówi o $+\infty$, z nawiasami - o $-\infty$.

Definicja 2. Granicą *funkcji f w $(-)\infty$ nazywamy liczbę g taką, że* $\forall_{\epsilon>0}\exists_M\forall_{x>M(x<M)}|f(x) - g| < \epsilon$. *Oznaczamy ją przez* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x))$. *Potocznie mówimy, że w (minus) nieskończoności funkcja f dąży do g.*

Definicja 3. Granicą *funkcji f w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ jest $(-)\infty$, jeśli* $\forall_M\exists_{\delta>0}\forall_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}f(x) > M(f(x) < M)$. *Potocznie mówimy, że w x_0 funkcja f dąży do $(-)\infty$ i zapisujemy* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.

Definicja 4. Granicą *funkcji f w punkcie $(-)\infty$ jest $(-)\infty$, jeśli* $\forall_M\exists_m\forall_{x>m(x<m)}f(x) > M(f(x) < M)$. *Potocznie mówimy, że w $(-)\infty$ funkcja f dąży do $(-)\infty$ i zapisujemy* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty)$.

Idea tych trzech definicji jest podobna jak pierwszej z wyjątkiem tego, że „pobliże” nieskończoności nie jest małym przedziałem ograniczonym, lecz przedziałem nieograniczonym, zaczynającym się od jakiejś (dużej) wartości. Jeśli granicą ma być nieskończoność, wykres w „pobliżu” danego argumentu (lub nieskończoności) musi znajdować się „powyżej” pewnej prostej poziomej. Jeśli granicę liczymy w nieskończoności, wykres badamy „na prawo” pewnej prostej pionowej („na lewo”, w wypadku minus nieskończoności). (rysunki)
Jako, że na matematycznych przedmiotach staramy się mówić ściśle, o co nam chodzi, doprecyzuję, co oznacza użycie zwrotu „w pobliżu”. Ściśle, jest to zbiór, który matematycy nazywają *otoczeniem.* Dla $x_0 \in \mathbb{R}$ otoczeniem będziemy nazywać odcinek $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$

dla pewnego $\epsilon > 0$. Analogicznie można definiować ideę otoczenia w $\mathbb{R}^n$, gdzie otoczeniem będzie kwadrat, sześcian itp. wokół danego punktu przestrzeni. W rozszerzonym zbiorze liczb rzeczywistych otoczeniem $+\infty$ jest dowolny przedział otwarty nieograniczony z prawej strony $(a, +\infty)$, a otoczeniem $-\infty$ jest dowolny przedział otwarty nieograniczony z lewej strony $(-\infty, a)$.
Dzięki definicji otoczenia, można wszystkie definicje granicy zawrzeć w jednej:

Definicja 5. Granicą *funkcji f w $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ jest $g \in \overline{\mathbb{R}}$, jeśli dla dowolnego U - otoczenia g istnieje V - otoczenie x_0 takie że $\forall_{x \in V} f(x) \in U$.*

Twierdzenie 1. *Granica (jeśli istnieje) może być tylko jedna tj. jeśli $g_1 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ i $g_2 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, to $g_1 = g_2$.*

Przykłady. $\lim\limits_{x \to 2} 2x + 1$, $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$.

II. Granice funkcji elementarnych. Granice jednostronne

Twierdzenie 2. *Jeśli f jest dowolną z poznanych funkcji elementarnych (czyli wielomianowych i wielomianopodobnych, trygonometrycznych i cyklometrycznych, wykładniczych i logarytmicznych) lub ich sumą, różnicą, iloczynem, ilorazem oraz złożeniem i jeśli $x_0 \in D_f$ to $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

W praktyce oznacza to, że jeśli w dowolnym momencie obliczania granicy takiej w miarę prostej funkcji, będziemy mogli podstawić x_0 do wzoru i uzyskać jakąś konkretną wartość, to ta wartość będzie granicą funkcji. Dlatego najczęstszym problemem jest obliczanie granic tych funkcji na końcach tzw. przedziałów określoności.

Definicja 6. Przedziałem określoności *funkcji f nazywamy przedział zawarty w dziedzinie D_f, taki, że żaden przedział zawierający go (i różny od niego) nie zawiera się w D_f.*

Przykład. $log_2[x(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)]$.
Wielomiany i funkcje wielomianopodobne
W wypadku wielomianu lub funkcji wielomianopodobnej (czyli funkcji różniącej się od wielomianowej tym, że wykładniki potęg we wzorze nie muszą być całkowite, wystarczy, że są większe od 0 np. $f(x) = 3x^{\frac{7}{3}} - x^2 + 5\sqrt{x} + 2$) jedynym krańcem przedziału określoności, na którym możemy mieć problem z określeniem granicy jest $\pm\infty$. Granicą w $\pm\infty$ jest zawsze (za wyjątkiem wielomianu stopnia zerowego, czyli funkcji stałej) $\pm\infty$. Znak granicy zależy od zachowania się na danym końcu dziedziny składnika zawierającego najwyższą potęgę. Oczywiście, dla funkcji wielomianopodobnej granica w $-\infty$ może nie istnieć, jeśli liczby ujemne nie należą do jej dziedziny.
Przykłady. $f(x) = -x^5 + 200x^4 + x - 73$, $f(x) = 3x^{\frac{7}{3}} - x^2 + 5\sqrt{x} + 2$.
Funkcje wykładnicze
Dla funkcji wykładniczej o podstawie $a > 0$, $a \neq 1$ mamy: $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{dla } 0 < a < 1 \\ \infty, & \text{dla } a > 1 \end{cases}$

oraz $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} \infty, & \text{dla } 0 < a < 1 \\ 0, & \text{dla } a > 1 \end{cases}$.
Funkcje trygonometryczne
Funkcje sin i cos mają dziedzinę rzeczywistą, więc granice mogłyby mieć tylko w nieskończonościach. Jednak dla obydwu tych funkcji, podobnie jak dla tg i ctg granica w nieskończoności nie istnieje. W przypadku dwu ostatnich funkcji można rozważać granice w „dziurach" w dziedzinie tj. w $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ dla funkcji tangens i w $k\pi$ dla funkcji cotangens i dowolnego całkowitego k. Granica ta nie istnieje (wykres), ale istnieją tak zwane granice jednostronne:

Definicja 7. Granicą lewostronną f *w punkcie* $x_0 \in \mathbb{R}$ *nazywamy liczbę* g *taką, że* $\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in(x_0-\delta,x_0)}|f(x)-g|<\epsilon$. *Oznaczamy ją przez* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$. *Potocznie mówimy, że w punkcie* x_0 *funkcja* f *dąży do* g *z lewej strony.*

Definicja 8. Granicą prawostronną *funkcji* f *w punkcie* $x_0 \in \mathbb{R}$ *nazywamy liczbę* g *taką, że* $\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in(x_0,x_0+\delta)}|f(x)-g|<\epsilon$. *Oznaczamy ją przez* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$. *Potocznie mówimy, że w punkcie* x_0 *funkcja* f *dąży do* g *z prawej strony.*

Analogicznie zmieniamy definicje zmierzania do nieskończoności z obu stron punktu x_0. Oczywiście:

Twierdzenie 3. *Dla* $x_0 \in \mathbb{R}$, $g \in \overline{\mathbb{R}}$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice prawo- i lewo-stronna funkcji* f *w* x_0 *i zachodzi* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = g$.

Dla funkcji trygonometrycznych i dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ mamy: $\lim\limits_{x\to(2k+1)\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty$ i $\lim\limits_{x\to(2k+1)\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to k\pi^-} \operatorname{ctg} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to k\pi^+} \operatorname{ctg} x = \infty$.

Funkcje logarytmiczne

Dla funkcji logarytmicznej o podstawie $a>0$, $a\neq 1$ mamy: $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{dla } 0<a<1 \\ \infty, & \text{dla } a>1 \end{cases}$

oraz $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} \infty, & \text{dla } 0<a<1 \\ -\infty, & \text{dla } a>1 \end{cases}$.

Funkcje cyklometryczne

Przedziały określoności funkcji arcsin i arccos są domknięte, więc w każdym punkcie granica tych funkcji jest równa ich wartości. Z kolei dziedziną arctg i arcctg jest $\mathbb{R}$, więc dla nich rozważamy tylko granice w nieskończonościach. Mamy więc:

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi, \lim_{x\to\infty} \operatorname{arcctg} x = 0.$$

Obliczanie granic ułatwia fakt, że można na nich (zazwyczaj) wykonywać działania tak, jak na zwykłych liczbach. Innymi słowy, możemy najpierw obliczyć granicę każdego z pomniejszych „fragmentów" funkcji, a następnie na nich wykonać działania. Formalizują to poniższe twierdzenia (zakładamy w nich, że $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$):

Twierdzenie 4. *Jeśli istnieje granica* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *i granica* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *to:*

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

3) $\lim\limits_{x\to x_0}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$.

Twierdzenie 5. *Jeśli* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$ *i* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *to* $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = b$ $(a,b\in\overline{\mathbb{R}})$.

Przykłady. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$, $\lim\limits_{x\to 0} 2^{3x+1}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(\operatorname{arcctg} x)$.

Twierdzenia powyższe powodują, że w naszych obliczeniach mogą się pojawić „zabronione" działania typu: dzielenie przez zero lub logarytmowanie zera, dodawanie nieskończoności itp. By sobie z tym poradzić, musimy rozszerzyć znane nam działania na zbiór $\overline{\mathbb{R}}$.

III. Działania na rozszerzonym zbiorze liczb rzeczywistych. Symbole nieoznaczone.

Wszystkie poniższe działania są zapisane nieformalnie, z punktu widzenia „czystej” matematyki. Dlatego na egzaminie, czy podczas jakiegokolwiek „publicznego występu” polecam zapisywanie tych formuł na marginesie, w cudzysłowie bądź w nawiasie kwadratowym (co tutaj będę czynić). Formalny zapis wymagałby dużo więcej miejsca i byłby nieczytelny. Na przykład, zamiast zapisu: $[\infty+\infty]=\infty$ musielibyśmy napisać:

$$\forall_{x_0\in\overline{\mathbb{R}}}(\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \wedge \lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=+\infty).$$

Jak widać, pierwsze sformułowanie jest wygodniejsze do zapisania i łatwiejsze do odczytania.

Wydaje się, że tych działań jest za dużo, by je zapamiętać, jednak są one naturalne i logiczne, więc przeczytanie ich kilka razy powinno wystarczyć. Poza tym, warto pamiętać, że te działania zachowują własności działań z $\mathbb{R}$ (typu: łączność, przemienność) i z tego korzystać.

Najpierw zajmiemy się *symbolami oznaczonymi*, czyli takimi działaniami na $\overline{\mathbb{R}}$, które zawsze dają ten sam wynik. a jest w poniższych przykładach dowolną liczbą rzeczywistą:

a) $[a+\infty]=[\infty+\infty]=[a-(-\infty)]=\infty$;

b) $[a-\infty]=[(-\infty)+(-\infty)]=[a+(-\infty)]=-\infty$;

c) $[a\cdot\infty]=\begin{cases}-\infty, & \text{dla } a<0\\ \infty, & \text{dla } a>0\end{cases}$; d) $[a\cdot(-\infty)]=\begin{cases}-\infty, & \text{dla } a>0\\ \infty, & \text{dla } a<0\end{cases}$;

e) $[\infty\cdot\infty]=[(-\infty)\cdot(-\infty)]=\infty$; f) $[(-\infty)\cdot\infty]=[\infty\cdot(-\infty)]=-\infty$;

g) $[\frac{a}{\infty}]=[\frac{a}{-\infty}]=0$; h) $[\frac{\infty}{a}]=\begin{cases}-\infty, & \text{dla } a<0\\ \infty, & \text{dla } a>0\end{cases}$; i) $[\frac{-\infty}{a}]=\begin{cases}\infty, & \text{dla } a<0\\ -\infty, & \text{dla } a>0\end{cases}$

j) $[a^{\infty}]=\begin{cases}\infty, & \text{dla } a>1\\ 0, & \text{dla } 1>a>0\end{cases}$; k) $[a^{-\infty}]=\begin{cases}0, & \text{dla } a>1\\ \infty, & \text{dla } 1>a>0\end{cases}$;

l) $[\log_a\infty]=\begin{cases}\infty, & \text{dla } a>1\\ -\infty, & \text{dla } 1>a>0\end{cases}$; m) $[\log_a 0^+]=\begin{cases}-\infty, & \text{dla } a>1\\ \infty, & \text{dla } 1>a>0\end{cases}$;

n) $[\infty^a]=\begin{cases}\infty, & \text{dla } a>0\\ 0, & \text{dla } a<0\end{cases}$; o) $[\infty^{\infty}]=\infty$; p) $[\infty^{-\infty}]=0$.

Przykłady. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}2^{3x+1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}x^{-x}$.

Symbole nieoznaczone to takie działania na rozszerzonym zbiorze liczb rzeczywistych, których wykonać się nie da bez dodatkowych informacji. Są to: $[\infty-\infty]$; $[\infty\cdot 0]$; $[\frac{0}{0}]$; $[\frac{\infty}{\infty}]$; $[1^{\infty}]$; $[0^0]$, $[\infty^0]$. Nie można ich „obliczyć” - by policzyć granice, które po podstawieniu dają taki wynik, trzeba dokonać dalszych przekształceń bądź skorzystać z odpowiedniego twierdzenia.

Przykłady. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}$.

Symbolem nieoznaczonym jest też formalnie $[\frac{a}{0}]$, gdy $a\neq 0$, ale z nim akurat łatwo sobie poradzić - wynikiem jest zawsze $\pm\infty$, a znak wyniku zależy od znaku licznika i mianownika.

Przykład. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-2}{x-1}$.

Kolejne podrozdziały skupią się na metodach radzenia sobie z symbolami nieoznaczonymi.

IV. Metody obliczania granic: funkcje wymierne, ilorazy funkcji wykładniczych i granice jednostronne. Symbole typu $[\frac{\infty}{\infty}]$, $[\frac{0}{0}]$, $[\infty-\infty]$.

Do granic typu $[\frac{\infty}{\infty}]$ i $[\frac{0}{0}]$ najlepiej stosować regułę de L'Hospitala, którą wkrótce poznamy (ale do tego potrzebne nam będą pochodne). Dość łatwo można poradzić sobie natomiast z niektórymi szczególnymi przypadkami:

Po pierwsze, funkcje wymierne (ilorazy wielomianów) i funkcje „wymiernopodobne" (ilorazy funkcji wielomianopodobnych). Przy obliczaniu ich granic w nieskończoności, dzielimy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę w mianowniku. Po tej operacji, w mianowniku (w granicy) uzyskamy liczbę, więc unikniemy symbolu nieoznaczonego. Jeśli są to granice typu $\lim_{x\to c}\frac{W(x)}{Z(x)}$, gdzie c jest liczbą rzeczywistą, $W(c) = Z(c) = 0$, to rozkładamy wielomiany W i Z na czynniki pierwsze i staramy się skrócić przez $(x-c)$ w liczniku i mianowniku (da się to zrobić dzięki twierdzeniu Bezouta).
Przy obliczaniu granic w nieskończoności ilorazów funkcji wykładniczych (i ich sum), stosujemy taką samą metodę, jak przy wielomianach. Różnicą jest tylko to, że staramy się wpierw sprowadzić wszystkie składniki do tego samego wykładnika, a potem dzielimy przez składnik o największej podstawie.
Przykłady. $\frac{2-x}{x^2-x-2}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{5\cdot 3^x+4^x}{3\cdot 2^{2x+1}+8\cdot 3^x}$
Z granicami typu $[\infty\cdot 0]$ najczęściej sobie radzimy korzystając z faktu, że dzielenie to jest to samo, co mnożenie przez odwrotność i sprowadzając je do postaci $[\frac{\infty}{\infty}]$ lub $[\frac{0}{0}]$ (wrócimy do tego przy okazji reguły de L'Hospitala).
Przy pomocy wzorów skróconego mnożenia, możemy często „przerobić na ułamki" i w ten sposób sprowadzić do postaci, z którą umiemy sobie poradzić, symbole nieoznaczone typu $[\infty-\infty]$.
Przykład. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-4})$.

V. Metody obliczania granic: symbole typu $[1^\infty]$.
Przykład. Rozważmy sytuację kapitału K ulokowanego na lokacie o rocznej stopie procentowej r (wyrażonej liczbą, nie procentem). Jeśli w ciągu roku kapitalizacja dokonuje się x razy to w każdym okresie kapitalizacji kapitał przemnażamy przez $(1+\frac{r}{x})$. Zatem po roku na koncie powinno być $K(1+\frac{r}{x})^x$. Co się stanie, jesli okres kapitalizacji będzie dążył do zera (raczej nie zdarza się tak na lokatach bankowych, ale w inwestycjach rzeczowych, czy w modelach produkcyjnych jak najbardziej - nazywa się to kapitalizacją ciągłą)? Kapitał będzie wtedy wynosił $K\lim_{x\to\infty}(1+\frac{r}{x})^x$. Ta ostatnia granica jest typu $[1^\infty]$, więc nie możemy jej podać bez dodatkowych obliczeń.

Twierdzenie 6. *Jeśli* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, *to* $\lim_{x\to x_0}(1+\frac{1}{f(x)})^{f(x)} = e$ *(stała Eulera). W szczególności* $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

Wniosek: $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{r}{x})^x = e^r$.
Mechanizm postępowania z granicami typu $[1^\infty]$:
a) Najpierw skoncentrujmy się na podstawie potęgi (która w granicy w x_0 daje nam 1). Rozbijamy ją na $1+reszta$, gdzie $reszta$ dąży do 0 w x_0 (jako, że całość dąży do 1, na pewno da się to uczynić). Na $reszta$ można patrzeć jako na $\frac{1}{innareszta}$ i teraz $innareszta$ spełnia założenie o $f(x)$ w ostatnim twierdzeniu.
b) Mamy już odpowiednią do twierdzenia postać podstawy potęgi: $(1+\frac{1}{innareszta})$. Teraz, by skorzystać z twierdzenia, musimy sprawić, by $innareszta$ pojawiła się w wykładniku. W tym celu korzystamy ze wzoru: $a^b = (a^c)^{\frac{b}{c}}$. W roli a występuje nasza podstawa, w roli b - wykładnik, który mamy na początku, w roli c - $innareszta$.
c) Mamy teraz postać $((1+\frac{1}{innareszta})^{innareszta})^{\frac{starywykladnik}{innareszta}}$. Z twierdzenia wiemy, że $\lim_{x\to x_0}((1+\frac{1}{innareszta})^{innareszta}) = e$, więc, zgodnie z twierdzeniem o granicy złożenia (punkt II), wystarczy, że zajmę się obliczeniem $\lim_{x\to x_0}\frac{starywykladnik}{innareszta}$, a wynikiem końcowym będzie $e^{\lim_{x\to x_0}\frac{starywykladnik}{innareszta}}$.
Przykłady. $\lim_{x\to\infty}(\frac{3x+2}{3x})^{-x+1}$, $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2}{3x})^{-2}$.

VI. Metody obliczania granic: inne (twierdzenie o trzech funkcjach)
W niektórych sytuacjach przydaje się twierdzenie o 3 funkcjach (zwane też twierdzeniem o policjantach i złodzieju lub twierdzeniem o trzech imprezowiczach).

Twierdzenie 7. *Jeśli w otoczeniu x_0 zachodzi nierówność $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, to $\lim_{x\to x_0} h(x) \leq \lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$ (o ile granice te istnieją). W szczególności, jeśli $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = y$, to $\lim_{x\to x_0} f(x) = y$.*

Przykłady. $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1} + 4^x + 5^{x-1}}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$.
