W poniższym pliku zaznaczyłem informacje o funkcjach elementarnych oraz umiejętności dotyczące działań na nich, które powinni Państwo znać ze szkoły. Oczywiście, przedstawione są tutaj tylko w sposób „hasłowy”, żeby Państwo sobie to przeczytali i, jeśli czegoś Państwo nie pamiętają, należy sobie przypomnieć. Jeśli Państwo tych informacji i umiejętności nie mają - polecam rozdział 1 (repetytorium) wskazanej w bibliografii książki Gurgula i Sudera „Matematyka dla kierunków ekonomicznych”.

I. Wielomiany, funkcje potęgowe, równania i nierówności wielomianowe

Najprostszymi w analizie funkcjami rzeczywistymi są wielomiany. Informacje o wielomianach, potrzebne w ramach tego kursu, były w szkole średniej. Dlatego pod spodem tylko przypominam pojęcia i twierdzenia, które Państwo powinni znać:

Wielomian, stopień wielomianu, współczynniki wielomianu, wyraz wolny, jednomian, funkcja stała (wielomian stopnia 0), funkcja afiniczna lub „liniowa” (wielomian stopnia 1 - patrz uwaga poniżej!), równość wielomianów, pierwiastek wielomianu, twierdzenie Bezouta, rozkład wielomianu na czynniki.

Powinni Państwo także wiedzieć: ile najwyżej pierwiastków rzeczywistych ma wielomian danego stopnia, że wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty, jaki jest warunek podzielności wielomianu przez dwumian postaci $x - a$, kiedy liczba całkowita lub wymierna może być pierwiastkiem wielomianu

Dodatkowo Państwo powinni umieć: rozwiązywać równania kwadratowe, rozkładać wielomian na czynniki pierwsze (jeśli ma on pierwiastki całkowite lub wymierne), dzielić przez siebie wielomiany, rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe.

Uwaga! Wielomiany pierwszego stopnia (czyli funkcje postaci $f(x) = ax + b$) są często w szkole i literaturze ekonomicznej nazywane „liniowymi”. Również podczas wykładu, na opisanie zależności reprezentowane takimi funkcjami często będziemy używać słowa „liniowe”. Jednak ściśle, funkcjami liniowymi są tylko te, dla których $b = 0$ (pojęciem odwzorowania liniowego szczegółowo zajmiemy się na algebrze). Matematycznie prawidłową nazwą są funkcje afiniczne (czyli takie, które od liniowych różnią się dodaniem pewnej stałej).

Definicja 1. Funkcją potęgową *zmiennej x nazywamy funkcję postaci $f(x) = x^a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$. Na naszym wykładzie rozważamy tylko funkcje, dla których $a \in \mathbb{Q}$.*

Przypominam, że $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ i $x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$. Dlatego funkcja potęgowa może być zakamuflowana jako ułamek albo pierwiastek.

Funkcje potęgowe, dla których $a \in \mathbb{N}$ są po prostu jednomianami, więc mają dziedzinę rzeczywistą. Dla innych funkcji potęgowych, trzeba dopasować dziedzinę do wykładnika. Jeśli a jest liczbą ujemną, to z dziedziny musimy usunąć 0. Jeśli zaś $a = \frac{p}{q}$ jest ułamkiem nieskracalnym oraz q jest parzyste, to liczby ujemne też nie należą do dziedziny.

II. Parzystość/nieparzystość, monotoniczność funkcji

Definicja 2. *Funkcja f jest* parzysta*, jeśli $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ i $\forall_{x \in D_f} f(x) = f(-x)$.*

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi Oy.

Definicja 3. *Funkcja f jest* nieparzysta*, jeśli $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ i $\forall_{x \in D_f} f(x) = -f(-x)$.*

Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem środka układu współrzędnych.

Przykłady $f(x) = x$ jest nieparzysta, $f(x) = x^2$ jest parzysta. Funkcja stale równa zero jest jedyną funkcją jednocześnie parzystą i nieparzystą.

Definicja 4. *Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy różnowartościową (lub injekcją), jeśli nie przyjmuje nigdy tej samej wartości dla dwu różnych argumentów, czyli $\forall_{a,b \in X} (a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$.*

Przykłady $f(x) = 2x + 1$, $f(x) = x^2$.

Definicja 5. *Funkcja f jest* rosnąca *w zbiorze $A \subset D_f$ jeśli dla każdych $a, b \in A$ zachodzi $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.*
Funkcja f jest malejąca *w zbiorze $A \subset D_f$ jeśli dla każdych $a, b \in A$ zachodzi $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.*
Jeśli w powyższych zdaniach mamy do czynienia tylko ze słabymi nierównościami między $f(a)$ i $f(b)$, to mówimy o funkcjach słabo rosnących/malejących *lub* niemalejących/nierosnących.
Jeśli funkcja jest rosnąca lub malejąca w zbiorze A, to mówimy, że jest monotoniczna *w tym zbiorze.*

Domyślnie, jeśli nie mówimy w jakim zbiorze funkcja jest rosnąca/malejąca, zakładamy, że jest ona rosnąca/malejąca w całej swojej dziedzinie.
Przykład $f(x) = x^3$, $f(x) = x^2$.
Uwaga! To, że funkcja jest rosnąca/malejąca w zbiorze A i jest rosnąca/malejąca w zbiorze B nie oznacza, że jest rosnąca/malejąca w zbiorze $A \cup B$!
Przykład $f(x) = x^3 - 3x$.
Pożytki z funkcji rosnących/malejących: rozwiązywanie nierówności. Jeśli po obu stronach nierówności występuje funkcja rosnąca w dziedzinie tej nierówności, możemy ją „pominąć”. Jeśli taka funkcja jest malejąca - jej pominięcie wymaga zmiany kierunku nierówności. Podobnie postępujemy, gdy chcemy na obu stronach nierówności wykonać tę samą operację - co jest dozwolone (z ewentualną zmianą kierunku nierówności), jeśli ta operacja jest funkcją monotoniczną.
Przykład $x^2 < 4$ dla $x > 0$ i $x < 0$. $x^{\frac{1}{4}} \geq 3$.
Własność różnowartościowości bardzo się przydaje przy okazji rozwiązywania równań. Stosujemy ją tak samo, jak monotoniczność dla nierówności.
Każda funkcja monotoniczna w całej dziedzinie jest też różnowartościowa.

III. Funkcje wymierne

Definicja 6. Funkcją wymierną *nazywamy iloraz dwu wielomianów (oczywiście mianownik nie może być wielomianem zerowym).*

Dziedziną funkcji wymiernej są wszystkie liczby rzeczywiste, dla których mianownik się nie zeruje.
Przy rozwiązywaniu nierówności zawierających funkcję wymierną, warto zwrócić uwagę na fakt, że znak ilorazu jest zawsze taki sam jak znak iloczynu (o ile ten ma sens).
Przykład $\frac{x^2+4x-5}{x+2} \geq 0$.

IV. Funkcje wykładnicze

Definicja 7. Funkcją wykładniczą *zmiennej x nazywamy dowolną funkcję postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.*

Powinni państwo umieć rysować wykresy funkcji wykładniczych.
Dziedziną funkcji wykładniczej jest zawsze $\mathbb{R}$, jej zbiorem wartości $\mathbb{R}_+$. Zawsze jest monotoniczna: malejąca dla $0 < a < 1$, rosnąca dla $a > 1$ (z tego korzystamy przy rozwiązywaniu równości i nierówności).

Twierdzenie 1. *Zachodzą następujące własności:*
a) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ (analogicznie dla dzielenia);
b) $(a^x)^y = a^{xy}$.

V. Funkcje okresowe, funkcje trygonometryczne

Przykłady zjawisk okresowych: sezonowe zmiany w handlu żywnością, cykle ekonomiczne.

Definicja 8. *Funkcja f jest* okresowa *jeśli istnieje $T > 0$ (zwane okresem funkcji), takie, że dla każdego $x \in D_f$ zachodzi $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$ (oczywiście, w takim wypadku musi też zachodzić $x + T, x - T \in D_f$).*
*O funkcji okresowej o okresie T mówi się, że jest T-*okresowa.

Najbardziej typowymi funkcjami używanymi w modelowaniu zjawisk okresowych są funkcje trygonometryczne.
W obliczaniu wartości funkcji będziemy się posługiwać miarą łukową ($\pi = 180°$). Przypomnijmy, że dla kątów α na płaszczyźnie, których wierzchołkiem jest początek układu współrzędnych, a dodatnia półoś Ox jest ramieniem początkowym, zaś drugie ramię przechodzi przez punkt o niezerowych współrzędnych (x, y), który jest w odległości r od środka układu współrzędnych definiuje się:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r};\ \cos\alpha = \frac{x}{r};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$

Oczywiście funkcje tangens i kotangens są zdefiniowane, gdy ich mianowniki są niezerowe. Powinni Państwo umieć rysować wykresy tych czterech funkcji.
Własności funkcji trygonometrycznych.

- Dziedzina: Dla funkcji sin i cos dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, dziedziną tg jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, a dziedziną ctg jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
- Zbiór wartości: Dla funkcji sin i cos zbiorem wartości jest $[-1, 1]$, dla funkcji tg i ctg - zbiór liczb rzeczywistych.
- Funkcje sin, tg i ctg są nieparzyste, a funkcja cos jest funkcją parzystą.
- Funkcja tg jest rosnąca w każdym swoim przedziale określoności (z osobna, nie w sumie!). Podobnie funkcja ctg jest malejąca w każdym swoim przedziale określoności (ale nie w ich sumie).
- Funkcje sin i cos są 2π-okresowe. Funkcje tg i ctg są π-okresowe.

Proszę sobie przypomnieć ze szkoły wartości funkcji trygonometrycznych w punktach 0, π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$.
Ponadto przydać się mogą poniższe wzory:
a) redukcyjne (pozwalające obliczać wartości poza przedziałem $[0, \pi]$) :
$\sin(\pi - x) = \sin x; \sin(\pi + x) = -\sin x;\ \cos(\pi - x) = \cos(\pi + x) = -\cos x.$
Poza przedziałem $[0, 2\pi]$ korzystamy z okresowości funkcji trygonometrycznych (dla tg i ctg już nawet poza $[0, \pi]$).
b) wzory na upraszczanie wyrażeń trygonometrycznych:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x};\ \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x};\ \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x};$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;\ \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x;$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x;\ \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y;$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}; \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.$$

Równania i nierówności trygonometryczne: jako, że funkcje trygonometryczne są okresowe, równania trygonometryczne często mają nieskończenie wiele rozwiązań. Takie równania i nierówności najlepiej rozwiązywać za pomocą wykresów.

VI. Działania na funkcjach

Na funkcjach, jak na liczbach można wykonywać działania arytmetyczne.

Definicja 9. *Niech* $f : X \to \mathbb{R}$ *i* $g : X \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *zaś* $\diamond$ *oznacza jedno z działań* $+, -, \cdot$. *Wtedy definiujemy funkcje:*
a)$\alpha \cdot f : X \to \mathbb{R}$, $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$.
b)$f \diamond g : X \to \mathbb{R}$, $(f \diamond g)(x) = f(x) \diamond g(x)$.
Dodatkowo, jeśli $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$, *to definiujemy:*
c) $\frac{f}{g} : X \setminus A \to \mathbb{R}$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

VII. Funkcje logarytmiczne

Definicja 10. *Dla* $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ funkcją logarytmiczną *nazywamy funkcję* $f(x) = \log_a x$.

Uwaga Dla przypomnienia: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ np. $\log_2 8 = 3$, bo $2^3 = 8$.
Funkcja ta jest różnowartościowa, monotoniczna (rosnąca dla $a > 1$, malejąca dla $0 < a < 1$), jej dziedziną są liczby rzeczywiste dodatnie, a zbiorem wartości liczby rzeczywiste.
Należy przypomnieć sobie wykresy funkcji logarytmicznych.
Szczególną funkcją logarytmiczną jest $\ln x$. ln, czyli logarytm naturalny, jest to logarytm, którego podstawą jest tzw. liczba Eulera - liczba niewymierna (tak jak π), oznaczana przez $e \approx 2,72$. Wkrótce poznamy ciekawe - zarówno z punktu widzenia zarówno matematyki, jak i zastosowań, własności tej liczby, oraz funkcji e^x i $\ln x$.
Zachodzą własności:

Twierdzenie 2. *a)* $\log_a 1 = 0$;
b) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ *(analogicznie dla dzielenia) - zasada działania suwaków logarytmicznych;*
c) $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$.

Równania i nierówności logarytmiczne rozwiązujemy, korzystając z własności monotoniczności i różnowartościowości funkcji.
