Całki - liczenie pól.

Typowy problem, do którego używa się całek to obliczanie pól obszarów ograniczonych przez dane krzywe. Do tego celu zazwyczaj należy obliczyć odpowiednie całki oznaczone (a przy tym i nieoznaczone).

Jeżeli mamy dane granice całkowania (to znaczy, pole, które liczymy ograniczone jest przez proste pionowe), możemy skorzystać z twierdzenia mówiącego, że pole szukane jest równe całce oznaczonej z różnicy wartości krzywych, ograniczających to pole „od góry" i od „dołu", której granicami są argumenty, przez które przechodzą wspomniane proste pionowe.
W zapisie matematycznym wygląda to tak: Pole P ograniczone krzywymi o równaniach $x = x_1,\ x = x_2\ (x_1 < x_2),\ y = f(x),\ y = g(x),\ (f(x) > g(x)$ dla $x \in (x_1, x_2))$, można obliczyć następująco:

$$P = \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x)\, dx \tag{1}$$

Przypominam, że, aby obliczyć wartość powyższej całki oznaczonej, należy obliczyć całkę nieoznaczoną, otrzymać funkcję pierwotną funkcji $f(x) - g(x)$ (powiedzmy, że jest to $H(x)$) i obliczyć $H(x_2) - H(x_1)$.
Przykład: Oblicz pole figury zawartej pomiędzy prostymi o równaniach : $x = 1,\ x = e$ i wykresami funkcji $f(x) = -\ln x,\ g(x) = \frac{1}{x}$ (gdyby, tak jak w treści zadania, było podane zamiast $g(x)$ oś OX, to podstawiamy $g(x) = 0$).
Postępując zgodnie z powyższym algorytmem mamy granice całkowania 1 i e. W przedziale $(1, e)$ $g(x)$ jest większe niż $f(x)$, zatem szukane pole to:

$$P = \int_1^e g(x) - f(x)\, dx = \int_1^e \frac{1}{x} + \ln x\, dx = \int_1^e \frac{1}{x}\, dx + \int_1^e \ln x\, dx$$

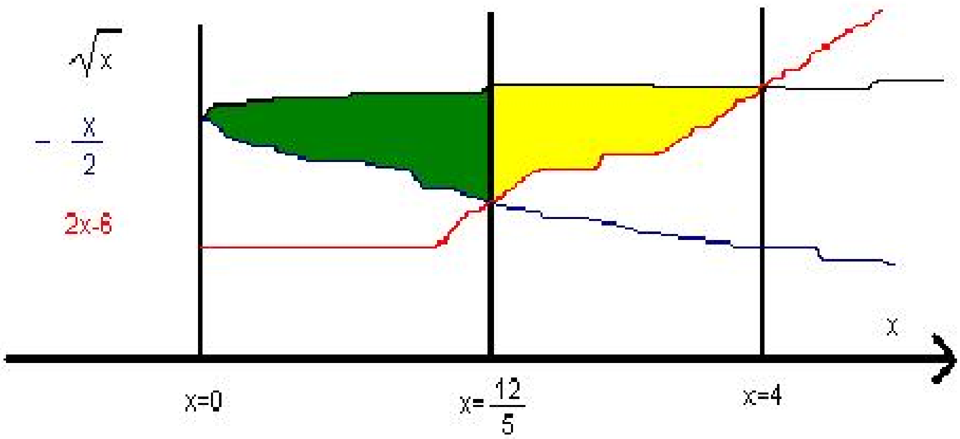
Oczywiście $G(x) = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C$, $F(x) = \int \ln x =$ (przez części) $= x\ln x - \int 1\, dx = x\ln x - x + C$. Jak zwykle przy liczeniu całek **oznaczonych** za C możemy podstawić 0.
Ostatecznie można wyliczyć pole:

$$P = G(e) - G(1) + F(e) - F(1) = \ln e - \ln 1 + e\ln e - e - 1\ln 1 + 1 = 1 - 0 + e - e - 0 + 1 = 2.$$

Trudniejsza jest sprawa, gdy krzywe ograniczające nasz obszar nie dają nam natychmiast informacji o granicach całkowania tzn. nie są prostymi pionowymi. Jednak możemy sprowadzić rzecz do poprzedniego przypadku, dzieląc pole na kilka takimi prostymi pionowymi. Najwygodniej nam dzielić w punktach, w których „coś się dzieje" - to znaczy przecinają się krzywe, ograniczające nasz obszar. Zazwyczaj w tych miejscach zmieniają się też krzywe ograniczające ten obszar.
Algorytm rozwiązywania zadań tego typu przedstawię na zadaniu: Oblicz pole ograniczone następującymi krzywymi: $y = \sqrt{x},\ y = -\frac{x}{2},\ y = 2x - 6$.
Po pierwsze, znajduję moje granice całkowania, którymi będą punkty przecięcia krzywych.

$$\sqrt{x} = -\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 0,\ -\frac{x}{2} = 2x - 6 \Leftrightarrow x = \frac{12}{5},\ \sqrt{x} = 2x - 6 \Leftrightarrow x = 4.$$

Tak więc interesujące nas punkty to 0, $\frac{12}{5}$ i 4. „Na lewo" od 0 i „na prawo" od 4 nasze krzywe są brzegami obszarów nieograniczonych (zawsze tak się dzieje za skrajnymi punktami, które otrzymamy w powyżeszej procedurze), więc na pewno obszar, którego pole liczymy, będzie też ograniczony prostymi $x = 0$ i $x = 4$. Jako, że w $\frac{12}{5}$ zmieniają się krzywe ograniczające nasz obszar, będziemy osobno liczyć część naszego pola P pomiędzy prostymi $x = 0$ i $x = \frac{12}{5}$, oraz między prostymi $x = \frac{12}{5}$ i $x = 4$. W sumie da nam to całe pole. Mamy więc granice całkowania. Teraz trzeba tylko ustalić, która krzywa na każdym przedziale ogranicza obszar od góry, a która od dołu.



Rysunek 1. *Na tym rysunku nie jest zachowana skala, ani współrzędne pionowe. Jednak schematycznie widzimy, w jaki sposób ograniczony jest szukany obszar. Pole obszaru liczymy jako sumę pól - zielonego i żółtego*

Można sprawdzić, że dla $x \in (0, \frac{12}{5})$ mamy nierówności: $\sqrt{x} > -\frac{x}{2} > 2x - 6$, zaś dla $x \in (\frac{12}{5}, 4)$ zachodzi $\sqrt{x} > 2x - 6 > -\frac{x}{2}$. Warto to narysować, by ujrzeć schematycznie jaki obszar badamy - patrz rys. 1.

Zatem, zgodnie ze wzorem (1) mamy $P = \int_0^{\frac{12}{5}} \sqrt{x} - (-\frac{x}{2})\ dx + \int_{\frac{12}{5}}^4 \sqrt{x} - (2x-6)\ dx$. Obliczenie tych całek zostawiam już Państwu - są one elementarne.