Wiemy już, że jeśli w matematyce istotna jest jakaś operacja, to operacja do niej odwrotna też zazwyczaj będzie interesująca. Dla dodawania mamy odejmowanie, dla mnożenia - dzielenie, dla potęgowania - pierwiastkowanie, dla funkcji wykładniczej - logarytm. Nic dziwnego, że istnieje (i jest bardzo ważna) operacja odwrotna do obliczania pochodnej (różniczkowania). Jest to całkowanie.
Wyznaczanie funkcji, której pochodną znamy, jest bardzo przydatne w wielu sytuacjach:
Przykład. Dana jest prędkość poruszania się przez pewien czas. Jaka droga została w tym czasie przebyta?
Przykład. Mamy daną funkcję krańcową jakiejś wielkości ekonomicznej (np. koszt krańcowy). Jak wygląda funkcja kosztu całkowitego?
Więcej przykładów zastosowań całek pojawi się w kolejnym rozdziale - o całkach oznaczonych. Jednak, by zajmować się nimi, musimy wpierw zrozumieć całki nieoznaczone.

I. Definicja

Definicja 1. *Niech f będzie funkcją rzeczywistą. Funkcję F, określoną i różniczkowalną na D_f i spełniającą warunek: $\forall_{x \in D_f} F'(x) = f(x)$ nazywamy* funkcją pierwotną *funkcji f.*

Generalnie, nie każda funkcja ma pierwotną. Można jednak udowodnić, że każda funkcja ciągła ma pierwotną. O funkcjach, dla których funkcja pierwotna istnieje mówimy, że są *całkowalne.*
Przykład. Funkcja $F(x) = x^2$ jest pierwotną funkcji $f(x) = 2x$. Zauważmy jednak, że funkcją pierwotną do f będzie też np. $x^2 + 7$ lub $x^2 - \sqrt{2}$ i generalnie $x^2 + C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$. Dlatego funkcja f ma nieskończenie wiele funkcji pierwotnych.
Sytuacja w przykładzie nie jest jakąś osobliwością - jest to ogólna prawidłowość. O ile różniczkowanie funkcji prowadzi nas do pojedynczego wyniku to operacja odwrotna do niego (znajdowanie funkcji pierwotnej, które nazywamy też całkowaniem) jako wynik daje nam nieskończenie wiele funkcji różniących się od siebie o stałą.

Twierdzenie 1. *Niech f będzie funkcją rzeczywistą, a F_1 - dowolną funkcją pierwotną f. Wtedy F_2 jest funkcją pierwotną f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $C \in \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $x \in D_f$ $F_2(x) = F_1(x) + C$.*

Zauważmy, że jeśli dodatkowo mamy daną wartość funkcji pierwotnej w jakimś punkcie (np. położenie w chwili 0, gdy chcemy wyznaczyć funkcję położenia, mając daną prędkość), to w rezultacie ta funkcja pierwotna będzie wyznaczona jednoznacznie. W ogólności, mamy dokładny opis zbioru funkcji pierwotnych, jeśli tylko wyznaczymy jedną z nich.

Definicja 2. Całką nieoznaczoną *funkcji f nazywamy zbiór funkcji pierwotnych funkcji f. Zapisujemy:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

(gdzie $F'(x) = f(x)$). W powyższym zapisie $\int$ jest symbolem całki, a dx - tego, że całkujemy po zmiennej x (nie wolno tego opuszczać w zapisie!), zaś f nazywa się funkcją podcałkową.

Przykład. $\int 2xdx = x^2 + C$, $\int 2xdy = 2xy + C$.

II. Obliczanie prostych całek

Niektóre całki można obliczyć z definicji, „zgadując” rozwiązanie, a następnie sprawdzając, czy pochodna z wyniku faktycznie jest równa funkcji podcałkowej. Można powiedzieć, że to jedyny uniwersalny sposób obliczania całek. Niestety, nie jest on zbyt praktyczny przy trudniejszych funkcjach. Jednak, na podstawie umiejętności obliczania pochodnych jesteśmy w stanie obliczyć całki niektórych istotnych funkcji.

Całki prostych funkcji:

$f(x)$	0	1	$x^r, r \neq -1$	$\sin x$	$\cos x$	e^x	$\frac{1}{x}$
$\int f(x)dx$	C	$x+C$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$e^x + C$	$\ln\lvert x\rvert + C$

$f(x)$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	a^x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\int f(x)dx$	$\operatorname{tg} x + C$	$\operatorname{ctg} x + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\arcsin x + C$	$\operatorname{arctg} x + C$

W tabeli nie ma wzorów na całki funkcji logarytmicznych i cyklometrycznych. Są one nieco bardziej skomplikowane, ale nauczymy się je obliczać.
Dla w miarę prostych funkcji, całki możemy wyznaczać na podstawie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2 (O liniowości całki)**.** *Zachodzą następujące zależności:*
1) $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)$
2) $\forall_{a\in\mathbb{R}} \int af(x)dx = a\int f(x)dx.$

Niestety, nie mamy równie wygodnych, jak w przypadku pochodnych, wzorów dotyczących całek iloczynu, ilorazu, czy złożenia funkcji. Dlatego obliczanie całek jest dużo trudniejsze niż pochodnych. Nie ma metod, które działają zawsze - by nabyć umiejętność obliczania całek potrzebne jest doświadczenie wynikające z przerobienia dużej liczby przykładów. Wtedy można mieć intuicję, która zasugeruje poprawną drogę do rozwiązania (a i to wcale nie zawsze). Co gorsza, istnieją całki, których konwencjonalnymi metodami nie da się obliczyć tj., precyzyjniej rzecz ujmując, funkcje pierwotne, nawet dość prostych funkcji, mogą być niemożliwe do przedstawienia za pomocą skończonej liczby działań na funkcjach elementarnych. Można jedynie za pomocą metod numerycznych obliczyć przybliżone wartości tych funkcji pierwotnych w różnych punktach.
Przykłady. $\int e^{-x^2}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{1}{\ln x}dx$, całki eliptyczne.
Na szczęście, obliczanie całek skomplikowanych funkcji nie jest zazwyczaj potrzebne w zagadnieniach ekonomicznych. Dlatego będziemy się przede wszystkim zajmować funkcjami, które można policzyć za pomocą dwu sprytnych sposobów: przez części i przez podstawienie.

III. Całkowanie przez części

Całkowanie przez części stosujemy, gdy chcemy znaleźć funkcję pierwotną iloczynu funkcji elementarnych. Opiera się ono na poniższym twierdzeniu:

Twierdzenie 3 (Twierdzenie o całkowaniu przez części)**.** *Jeśli funkcje f i g są różniczkowalne we wspólnej dziedzinie, to zachodzi:*
$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx$

Wzór ten łatwo odtworzyć całkując obustronnie wzór na pochodną iloczynu.
Wydaje się, że zastosowanie tej formuły nie poprawia sytuacji, bo po obu jej stronach występuje całka, którą i tak musimy obliczyć. Jednak, ten wzór jest użyteczny, gdy mamy scałkować iloczyn dwu funkcji z których jedna znacząco się upraszcza, gdy się ją różniczkuje (f), zaś druga się nie komplikuje zanadto przy całkowaniu (g'). Warto zapamiętać następującą kolejność (nie jest to żadna generalna prawidłowość, ani twierdzenie, tylko pewna wskazówka, która najczęściej, choć nie zawsze, powinna zadziałać): funkcje **logarytmiczne, cyklometryczne, wielomianowe, trygonometryczne**, **wykładnicze**. Jeśli mamy iloczyn dwu różnych typów funkcji to zazwyczaj tę, która w poprzednim zdaniu wymieniona jest wcześniej bierzemy jako f, a tę, która wymieniona jest później jako g'. Jest to o tyle logiczne, że: logarytmy i funkcje cyklometryczne po zróżniczkowaniu przyjmują postać znacznie prostszą, a do scałkowania są nieelementarne, wielomiany łatwo się różniczkuje i całkuje, ale właśnie po zróżniczkowaniu „znikają”, funkcje trygonometryczne zmieniają się niemal tak samo przy różniczkowaniu i całkowaniu, a wykładnicze w zasadzie się nie zmieniają w obu wypadkach.

Czasem trzeba całkować przez części kilka razy, by dojść do wyniku (jak przy używaniu reguły de L'Hospitala).
Przykłady. $\int x^2 2^x \, dx$, $\int \ln x \, dx$
Jak widać, wzory na całki funkcji logarytmicznych można najłatwiej obliczyć dzięki stosowaniu całkowania przez części.

IV. Całkowanie przez podstawienie

Całkowanie przez podstawianie wymaga trochę spostrzegawczości i jest dużo mniej schematyczne niż całkowanie przez części. Stosujemy je zasadniczo w dwu wypadkach:
a) Gdy w skład funkcji podcałkowej wchodzi pewna funkcja i jej pochodna;
b) Gdy mamy do czynienia ze złożeniem funkcji.
Niestety, nie ma gwarancji, że nawet jeśli któraś z tych sytuacji ma miejsce, całkowanie przez podstawienie doprowadzi nas do wyniku. Dodatkowo, nawet jeśli jeden sposób podstawienia nie działa, nie wiemy, czy nie zadziała jakiś inny.
Wszystko opiera się na twierdzeniu:

Twierdzenie 4 (Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie)**.** *Jeśli funkcja f i g są różniczkowalne i ich złożenie w pewnym przedziale ma sens, to zachodzi:*
$\int f(g(x))g'(x) \, dx = \int f(t) \, dt$, *gdzie* $t = g(x)$.

Nazwa metody bierze się właśnie od *podstawienia* pomocniczej zmiennej t w miejsce pewnej funkcji składowej funkcji podcałkowej. W przypadku a) podstawiamy t za wskazaną właśnie funkcję, w przypadku b) - za funkcję wewnętrzną złożenia. Po obliczeniu prostej (przynajmniej mamy nadzieję, że prostej) całki po prawej stronie, powracamy do początkowych zmiennych.
Przykłady. $\int \sin(3x+1) \, dx$, $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$.
Dodatkowo, przy niektórych całkach musimy zastosować obydwa sposoby całkowania.
Przykład. $\int \arcsin x \, dx$.