Według mnie w tych wszystkich pochodnych najtrudniej jest zrozumieć pochodną złożenia. Chciałbym tutaj rozwinąć autorską metodę „prezentową” różniczkowania (czyli liczenia pochodnych) funkcji złożonych. Gdy tłumaczyłem tę metodę na innych zajęciach, było to dobrze przyjęte, więc może warto, by się Państwo z nią zapoznali.

Po pierwsze: wzór znamy:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x). \tag{1}$$

Jednakże, na pierwszy rzut oka nie zawsze widać, że funkcja jest złożona. Na potrzeby naszego kursu wystarczy taka interpretacja: tego wzoru używamy, gdy nie potrafimy funkcji rozbić na sumę, iloczyn lub iloraz funkcji, które umiemy różniczkować. Wtedy z części funkcji robimy „paczkę” (oznaczam ją tak: $\square$ - we wzorze (**??**) ta paczka zastępuje $g(x)$) i zajmujemy się najpierw funkcją zewnętrzną, różniczkując ją jako funkcję zależną od $\square$ (zamiast od x), a następnie „rozpakowujemy paczkę”, czyli wyliczamy pochodną $\square$ (czyli $g(x)$), już jako funkcję zależną od x. Na końcu mnożymy wyniki (oczywiście wszędzie w miejsce $\square$ wpisujemy to co było w środku „paczki”).Funkcję zewnętrzną możemy rozpoznać po tym, że jest to ostatnia operacja jaką wykonujemy, gdy mamy dane x, by uzyskać wartość funkcji.

Oczywiście jest to zapewne zupełnie niezrozumiałe, ale przykłady powinny wszystko wyjaśnić.

Niech $f(x) = \sin^{\frac{5}{2}} x = (\sin x)^{\frac{5}{2}}$ (ten drugi zapis jest rzadziej stosowany, ale lepiej na nim widać, że funkcja jest złożona). Jeśli mam obliczyć wartość tej funkcji mając dane x, najpierw obliczam $\sin x$, a następnie podnoszę to do potęgi $\frac{5}{2}$. Ergo - ostatnią operacją, którą wykonuję jest podnoszenie do potęgi, czyli to jest funkcja zewnętrzna. Pozostałe operacje „wkładam do paczki”: $\square = \sin x$. Zgodnie z opisem wcześniejszym liczę pochodną funkcji zewnętrznej $(\square^{\frac{5}{2}})' = \frac{5}{2}\square^{\frac{3}{2}}$. Teraz „rozpakowuję paczkę”: $\square' = (\sin x)' = \cos x$. Zatem, $f'(x) = (\square^{\frac{5}{2}})' \cdot \square' = \frac{5}{2}\square^{\frac{3}{2}} \cdot \cos x =$ (tu wstawiam „zawartość paczki”) $= \frac{5}{2}(\sin x)^{\frac{3}{2}} \cdot \cos x$. Analogicznie rozpatruję inne przykłady: funkcją zewnętrzną mogą być na przykład funkcje logarytmiczne, wykładnicze, trygonometryczne i cyklometryczne - przykłady poniżej:

- $f(x) = \log_2(x^2+1)$. Mając dany x najpierw przekształcam go przez wielomian do postaci x^2+1 (pochodne wielomianu liczy się łatwo, więc mogę to traktować jako jedną operację), a następnie biorę z tego co wyszło logarytm przy podstawie 2. Czyli zewnętrzną funkcją jest logarytmowanie, a do pudełka wkładam x^2+1 ($\square = x^2+1$). Czyli $f'(x) = (\log_2(\square))' \cdot \square' = \frac{1}{\square \cdot \ln 2} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2+1)\cdot \ln 2}$.
- $f(x) = 5^{\arcsin x}$. Analogicznie rozumując, $\square = \arcsin x$. $f'(x) = (5^\square)' \cdot \square' = 5^\square \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 5^{\arcsin x} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \cos(e^x)$. Podstawiam $\square = e^x$. $f'(x) = (\cos \square)' \cdot \square' = -\sin \square \cdot e^x = -\sin(e^x) \cdot e^x$.
- $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$. (Musi być $x \geq 0$!) Podstawiam $\square = \sqrt{x}$. $f'(x) = (\operatorname{arctg} \square)' \cdot \square' = \frac{1}{1+\square^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$.

Można też używać tego wzoru wielokrotnie w jednym zadaniu. Np. $f(x) = \sin(\ln(x^2+x))$. Jako, że ostatnią operacją jest wzięcie sinusa, podstawiamy $\square = \ln(x^2+x)$. $(\sin(\square))' = \cos(\square)$. Jednak nie da się bezpośrednio obliczyć $\square'$, gdyż wewnątrz „paczki” mamy funkcję złożoną, a więc następną „paczkę” do rozpakowania. Powiedzmy, że w innym kształcie (by nie robić zamieszania z oznaczeniami): $\diamond = x^2+x$. Zatem $\square' = (\ln(x^2+x))' = (\ln(\diamond))' \cdot (\diamond)' = \frac{1}{\diamond} \cdot (2x+1) = \frac{2x+1}{x^2+x}$. Teraz możemy obliczyć pochodną f. $f'(x) = (\sin(\square))' \cdot \square' = \cos(\square) \cdot \frac{2x+1}{x^2+x} = \cos(\ln(x^2+x)) \cdot \frac{2x+1}{x^2+x}$.

Mam nadzieję, że będzie to dla Państwa pomocne.

Grzesiek Kosiorowski