Sztuczki - podstawowe własności funkcji.

Problem

Mamy funkcję. Jak to na tego typu zajęciach funkcja - pewnie jest dana jakimś wzorem. No i załóżmy, że prowadzącemu zajęcia zachciało się zadać pytanie o jej dziedzinę (a tak w zasadzie - to nawet jak nie ma takiego pytania, to i tak trzeba to sprawdzić, zanim cokolwiek o funkcji się powie). Co robić?

Rozwiązanie problemu.

I. Czy we wzorze funkcji występuje ułamek? Jeśli choć kawałek funkcji jest postaci $\frac{g(x)}{h(x)}$, do dziedziny funkcji należą tylko takie x, dla których $h(x) \neq 0$.

Uwaga! Czasem ułamek jest zakamuflowany jako funkcja wykładnicza: np. ($x^{-1} = \frac{1}{x}$)

II. Czy we wzorze funkcji występuje pierwiastek parzystego stopnia (np. kwadratowy)? Jeśli choć kawałek funkcji jest postaci $\sqrt[n]{g(x)}$ - gdzie n jest liczbą naturalną, parzystą (np. $\sqrt{g(x)}$) - do dziedziny funkcji należą tylko takie x, dla których $g(x) \geq 0$.

Uwaga! Czasem pierwiastek jest zakamuflowany jako funkcja potęgowa: np. ($x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$).

III. Czy we wzorze funkcji występują funkcje trygonometryczne, bądź cyklometryczne: tg, ctg, arcsin, arccos?

Jeśli choć kawałek funkcji jest postaci: $\mathrm{tg}(g(x))$, do dziedziny funkcji należą tylko takie x, dla których $g(x) \neq \frac{2k+1}{2}\pi$, dla każdego $k \in \mathbb{Z}$.

Jeśli choć kawałek funkcji jest postaci: $\mathrm{ctg}(g(x))$, do dziedziny funkcji należą tylko takie x, dla których $g(x) \neq k\pi$, dla każdego $k \in \mathbb{Z}$.

Jeśli choć kawałek funkcji jest postaci: $\arcsin(g(x))$ lub $\arccos(g(x))$, do dziedziny funkcji należą tylko takie x, dla których $-1 \leq g(x) \leq 1$.

IV. (raczej nie będzie się zdarzać) Czy we wzorze występuje funkcja wykładnicza? Jeśli choć kawałek funkcji jest postaci: $g(x)^{h(x)}$, do dziedziny funkcji należą tylko takie x, dla których $g(x) > 0$, chyba, że:

a) $h(x)$ przyjmuje tylko wartości całkowite dodatnie - wtedy $g(x)$ może być dowolne.

b) $h(x)$ przyjmuje tylko wartości całkowite nieujemne i, dla pewnego x_0 z dziedziny funkcji, $h(x_0) = 0$ - wtedy do dziedziny funkcji należą tylko takie x, dla których $g(x) \neq 0$.

V. Czy we wzorze występuje logarytm? Jeśli choć kawałek funkcji jest postaci: $\log_{g(x)} h(x)$, do dziedziny funkcji należą tylko takie x, dla których: $g(x) > 0$ i $g(x) \neq 1$ oraz $h(x) > 0$.

Przykład

Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{log_{x^2-1}(x^2+2x)}{1-\sqrt{x+5}} + \arcsin(\frac{1}{25}x^2)\,\mathrm{ctg}(\pi x)$. Chcemy zbadać jej dziedzinę. Oto proponowana kolejność postępowania:

We wzorze występuje ułamek $\frac{log_{x^2-1}(x^2+2x)}{1-\sqrt{x+5}}$, a zatem z I wiadomo, że musi być $1 - \sqrt{x+5} \neq 0$, czyli $1 \neq \sqrt{x+5}$, czyli $x + 5 \neq 1$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

We wzorze występuje pierwiastek $\sqrt{x+5}$, zatem wiemy z II, że $x + 5 \geq 0$, skąd dostajemy, że $x \in [-5; \infty)$.

We wzorze mamy logarytm $log_{x^2-1}(x^2+2x)$. Z V mamy warunki: $x^2-1 > 0$, $x^2-1 \neq 1$, $x^2+2x > 0$, które po przeliczeniach (proszę je sprawdzić!) dają nam odpowiednio: $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ oraz $x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$.

We wzorze mamy funkcję cyklometryczną: $\arcsin(\frac{1}{25}x^2)$. Z III wiemy, że musi być zatem $-1 \leq \frac{1}{25}x^2 \leq 1$. Po przeliczeniach (proszę je sprawdzić!) daje nam to: $x \in [-5; 5]$.

We wzorze mamy funkcję cotangens: $\mathrm{ctg}(\pi x)$. Wiemy z III, że wobec tego musi być $\pi x \neq k\pi$, czyli $x \neq k$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, a więc (w innym zapisie) $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Aby x było elementem dziedziny musi spełniać **wszystkie** obliczone powyżej warunki. Zatem dziedzina funkcji jest przecięciem (iloczynem) wszystkich obliczonych powyżej zbiorów (poniższe obliczenie proszę sprawdzić we własnym zakresie!):

$D_f = [-5; \infty) \cap (\mathbb{R} \setminus \{-4\}) \cap ((-\infty; -1) \cup (1; \infty)) \cap (\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}) \cap ((-\infty; -2) \cup (0; \infty)) \cap [-5; 5] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = [(-5; -2) \cup (1; 5)] \setminus \{-4; -3; \sqrt{2}; 2; 3; 4\}$