Przykład. *Kalkulator* Wiemy, że dla liczb niewymiernych (np. π) kalkulator podaje tylko przybliżone wartości. Dlaczego sądzimy, że otrzymamy w miarę dokładne wyniki prowadząc na nich obliczenia później (np. licząc π^2)?

I. Definicja.

Rozważamy funkcje, których dziedziną i przeciwdziedziną jest pewien podzbiór $\mathbb{R}$ (dla innych funkcji definicje są bardzo podobne, jednak w ramach tego kursu praktycznie nie będziemy się nimi zajmować).

Definicja 1. *Funkcja f jest* ciągła *w punkcie $x_0 \in D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy granica $\lim_{x\to x_0} f(x)$ istnieje i $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Definicja 2. *Funkcja f jest* ciągła*, gdy jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.*

Definicja 3. *Funkcje elementarne są ciągłe. Dodatkowo, suma, różnica, iloczyn i iloraz (o ile ma sens) oraz złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.*

Zbiór funkcji ciągłych, których dziedziną jest zbiór A, a przeciwdziedziną zbiór B oznaczamy $C(A, B)$. Domyślną przeciwdziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych dlatego zapis $C(A)$ oznacza to samo co $C(A, \mathbb{R})$.

Przykład. Sprawdzanie ciągłości: $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{dla } x \le 0 \\ 1-x, & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 2x+3, & \text{dla } x \ge 1 \end{cases}$.

II. Funkcje nieciągłe w ekonomii

Często w ekonomii zakładamy ciągłość różnych funkcji: kosztu, popytu, podaży, użyteczności itp. niejako domyślnie. Zazwyczaj też tak będziemy postępować. Jednak warto sobie uświadomić, że funkcje nieciągłe nie są tak rzadkie i nietypowe.

Przykład. *Koszt połączeń telefonicznych* - przykładowa taryfa: opłata za 3 minuty rozmowy, a potem za każdą rozpoczętą minutę.

Przykład. *Funkcje zapasów* - jeśli założymy, że firma sprowadza nową partię towaru dopiero po (przynajmniej częściowym) opróżnieniu magazynu.

Najczęściej jednak takie funkcje są ciągłe „prawie wszędzie", czyli poza pojedynczymi punktami nieciągłości.

Zadanie. Wzór funkcji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która byłaby nieciągła w każdym punkcie dziedziny.

III. Pożytki z ciągłości

Po pierwsze, ciągłość funkcji często gwarantuje możliwość rozwiązania zagadnienia często spotykanego w ekonomii lub finansach: problemu optymalizacji (czyli znajdowania największej/najmniejszej wartości danej wielkości pod pewnymi warunkami). Przykład: maksymalizacja zysku, minimalizacja kosztu.

Twierdzenie 1 (Weierstrassa). *Jeśli pewna funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$, to f przyjmuje w tym przedziale wartość największą i najmniejszą.*

Przykłady. Konieczność założeń twierdzenia.

Przykład. Nieliniowa zależność dochodów od ceny, paradoks Laffera.

Twierdzenie 2 (Darboux). *Jeśli pewna funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i $f(a)f(b) < 0$ (czyli $f(a)$ i $f(b)$ są przeciwnych znaków), to w tym przedziale istnieje miejsce zerowe funkcji f tj. punkt $t \in (a, b)$ taki, że $f(t) = 0$.*

Przykład. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Przykład. Uzasadnienie prawidłowości sposobu rozwiązywania nierówności wielomianowych.

Przykład. Istnienie równowagi rynkowej podaży i popytu (model uproszczony, statyczny).